78996
Smith
24

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

24
RECEIVED
BUREAU OF
AMERICAN ETHNOLOGY.
1904
LIBRARY.

SIEBZEHNTER BAND.

1899.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUL 16 1926
NATIONAL MUSEUM

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

[IN WIEN BEI CARL GRAESER & Co.]

LIBRARY OF CONGRESS
FEB 24
SMITHSONIAN
cRy3

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

SIEBZEHNTER BAND.

1899.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

[IN WIEN BEI CARL GRAESER & Co.]

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

INHALT DES XVII. BANDES.

Abhandlungen.

Seite

1. Paul Stäckel, Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai 1
2. Ludwig Schlesinger, Über das Gauss'sche Pentagramma mirificum. 20
3. Joseph Kürschák, Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung 29
4. A. Ónodi, Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven 39
5. A. Ónodi, Das subcerebrale Phonationscentrum 70
6. Alois Schuller, Über die richtige Unterscheidung der collectiven und dispansiven optischen Systeme 83
7. L. Klug, Desmische Systeme 95
8. J. Hegyfoky, Die Vertheilung des Niederschlages nach Tageszeiten 113
9. R. von Kövesligethy, Über das Spectrum der Himmelskörper . . 127
10. R. von Kövesligethy, Über die Axendrehung der Fixsterne . . . 166
11. Alex. Mágócsy-Dietz, Das Diaphragma im Marke der dicotylen Holzgewächse 181
12. Gustav Rados, Gruppen inducierter Substitutionen 227
13. Gustav Rados, Über die Factorenzerlegung der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution 248
14. Paul Plósz, Beiträge zur Fettbildung in der Leber 261
15. Alois Schuller, Secundäre Kathodenstrahlen 281
16. Anton Abt, Thermoelektrische Kraft einiger Metalloxyde und Sulfide in Verbindung mit einander und mit einfachen Metallen bei 100° Temperaturunterschied der Berührungsstellen 292
17. Desider Korda, Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleitungsfähigkeit des Eises 313
18. E. Lörenthey, „Andorina" und „Daránya", zwei neue Brachyuren-Gattungen aus Ungarn 328

Sitzungsberichte.

Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

16. Januar 1899 337
13. Februar 1899 337
13. März 1899 337

Seite
17. April 1899 338
15. Mai 1899 340
19. Juni 1899 340
16. Oktober 1899 342
20. November 1899 343
18. Dezember 1899 343

Bericht über die Thätigkeit der Ung. Akademie der Wissenschaften.

Jahresversammlung 1899:
1. Eröffnungsrede des Präsidenten 344
2. Bericht des Generalsecretärs 350
Zur Erinnerung an Géza von Mihalkovics 357

NAMENREGISTER.*

Abt A., Thermoelektrische Kraft einiger Metalloxide und Sulfide in Verbindung mit einander und mit einfachen Metallen bei 100° Temperaturunterschied der Berührungsstellen. 292, 343.

Csorba G., Zur Theorie der additiven Behandlung der ganzen Zahlen. 338.*

Daday E., Freilebende Nematoden aus Neu-Guinea. 342.* — Entomostraceen und Hydrachmiden aus Neu-Guinea. 343.*

Fabinyi R., Über die „Ceracidine" genannten Färbestoffe. 337.*

Filarszky F., Pflanzenmorphologie. 340.*

Gáspár J., Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens. 339. — Beiträge zur Chemie des Klebers. 340. — Die chemische Untersuchung des Weizenklebers. 340.*

Genersich A., Über die Bauchfellcysten. 338.

Grósz E., Die von der Wirbelsäulenschwindsucht herrührende Blindheit. 341.

Györy T., Morbus Hungaricus. 342.*

Hajós L., Zur Histologie der Epilepsie. 337.*

Hankó W., Über die Schwankung der Zusammensetzung der Mineralwässer. 339. — Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens. 339.

Hasenfeld A., Auf welche Art wird die Function des an überwuchernden Klappenfehler leidenden Herzens durch die fette (phosphorige) Entartung der Muskulatur beeinflusst. 342.*

Hegyfoky J., Die Vertheilung des Niederschlages nach Tageszeiten. 113, 338.

Heller A., Bericht über die 1898 in London gehaltene internationale Conferenz über einen math. naturwiss. Katalog. 342.*

Högyes A., Statistik des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1898. 340.* — Neuere Beiträge zur Frage des reflexen Zusammenhanges des Hör- und Sehorganes. 340.*

Hoór M., Neue Methode zur Bestimmung der Rutschung der Inductionsmotoren mit wechselndem Strome. 337.

---

* Der Stern * bedeutet, dass bloss der Titel der Abhandlung angeführt ist.

Klug L., Desmische Systeme. 95.

Klupáthy E., Kathodenstrahlen in nicht homogenem und magnetischem Rotationsraum. 341.

Kövesligethy R., Über das Spectrum der Himmelskörper. 127. — Über die Axendrehung der Fixsterne. 166, 342.* — Bericht über das Handbuch der astronomischen und mathematischen Geographie. 337.*

Korda D., Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens. 313, 337.

Kürschák J., Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung. 29.

Laufenauer C., Die Histologie der Haematohydrose. 337.*

Lörenthey E., „Andorina" und „Darányia", zwei neue Brachyuren-Gattungen aus Ungarn. 327.

Mágócsy-Dietz A., Das Diaphragma im Marke der dicotylen Holzgewächse. 181.

Mihalkovics G., Zur Erinnerung an. 357.

Mocsáry A., Die Neuropteren Ungarns. 340.*

Ónodi A., Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven. 39. — Das subcerebrale Phonationscentrum. 70. — Über das Centrum der menschlichen Tonbildung. 337.* — Zur Kenntnis der Nebenhöhlen der Nase. 343.* — Chorea laryngis. 343.*

Plósz P., Beiträge zur Fettbildung in der Leber. — Fettbildung aus Kohlehydraten. 261, 337.*

Rados G., Gruppen inducierter Substitutionen. 227. — Über die Factorenzerlegung der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution. 248. — Zur Theorie der algebraischen Resolventen. 340.*

Ranschburg P., Zur Psychologie der hysterischen motorischen Lähmungen. 337.*

Richter A., Zur Physiologie der Luftwurzeln. 343.*

Schaffer C., Über die Structur des hinteren Bandes des Rückenmarkes. 337.*

Schlesinger L., Über das Gauss'sche Pentagramma mirificum. 20, 341.

Schulek W., Schutzgläser gegen das ultraviolette Licht auf Grund von Studien über Lichtwirkung. 340.* — Die Lichtabsorption durchsichtiger gelber Stoffe. 340*. — Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre. 341. — Ungarische Beiträge zur Augenheilkunde. 343.*

Schuller A., Über die richtige Unterscheidung der collectiven und dispansiven optischen Systeme. 83. — Secundäre Kathodenstrahlen. 281.

Sóbányi J., Vorangehender Bericht über seine hydrographische Studienreise. 337.*

Stäckel P., Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. 1. — Zur Theorie der imaginären Zahlen in den nachgelassenen Schriften Johannes von Bolyai's. 340.

Staub M., Das Cinnamomum Genus aus der urweltlichen Flora. 339.

Steindl E., Über das neue Parlamentsgebäude in Budapest. 337.*

Szarvasy E., Die Darstellung der Induline auf elektrolytischem Weg. 342.

Szépligeti V., Braceniden aus Neu-Guinea. 343.*

Tangel F., Ein Beitrag zur Kenntniss des Energiegehaltes der menschlichen Nierenausscheidung. 342.

Thanhoffer L., Die Lage des Herzens im Körper. 343.* — Ein neues Hilfsmittel zur Untersuchung des Zusammenhaltens der Zellen. 343.*

Zimányi C., Beiträge zur Kenntniss des Dognácskaer rosenfarbenen Aragonites. 337.*

1.

DIE ENTDECKUNG DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE DURCH JOHANN BOLYAI.

Auf Grund nachgelassener Aufzeichnungen Johanns dargestellt von

PAUL STÄCKEL,

Ord. Prof. der Mathematik an der Univ. Kiel.

Vorgelegt der ungarischen Akademie in der Sitzung vom 18. Juni 1900 durch das ord. Mitglied *Jul. König.*

In Johann Bolyais Nachlass, dessen Benutzung mir das ev.-ref. Collegium zu Maros-Vásárhely freundlichst gestattet hat, finden sich umfangreiche Aufzeichnungen, in denen Johann über die Entstehung seiner absoluten Geometrie berichtet. Ein Theil davon stammt aus der Zeit zwischen 1833 und 1835, ein andrer aus der Zeit zwischen 1851 und 1860. Da es sich nicht um druckfertige Ausarbeitungen, sondern um Entwürfe, zum Theil auf einzelnen Zetteln, mit zahlreichen Wiederholungen, Einschaltungen, Streichungen handelt, und da die Aufzeichnungen der ersten Periode von heftigen Angriffen auf Johanns Vater Wolfgang wimmeln, die Johann später bereut hat, so erschien ein vollständiger Abdruck nicht angebracht, es ergab sich vielmehr für den Verfasser die Aufgabe, auf Grund dieses Materials und der sonstigen, allerdings recht spärlichen Quellen, die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai im Zusammenhange darzustellen; dabei sind, so weit das irgend möglich war, die Aufzeichnungen Johanns in den Text aufgenommen worden. Als Hauptergebniss lässt sich die Feststellung der Thatsache bezeichnen, dass Johann seine absolute Raumlehre

durchaus selbständig entdeckt und ausgebildet hat. Damit soll nicht geleugnet werden, dass Anregungen seitens seines Vaters WOLFGANG BOLYAI und eines Jugendfreundes KARL SZÁSZ, auf den bereits Herr JOHANN BEDÖHÁZI aufmerksam gemacht hat*, fördernd eingewirkt haben; allein Einflüsse dieser Art bedeuten nicht mehr, als die auslösenden Kräfte des Lichtes und der Wärme bei der Entwickelung organischen Lebens, den Kern der Individualität lassen sie unberührt.

Die erste Anregung zur Beschäftigung mit der Parallelentheorie verdankt JOHANN BOLYAI seinem Vater WOLFGANG, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtete und ihn „auf die Unvollkommenheit der Theorie der Parallelen, der Geraden und anderer Grundlehren aufmerksam machte". Es handelte sich freilich hierbei nur um Andeutungen, die der geniale Vater dem wissenshungrigen Knaben „zuwarf". Einige Aeusserungen dieser Art führt Johann gelegentlich an. „Einst äusserte er, derjenige, der einen Beweis für das elfte Axiom fände, verdiente einen Diamanten, so gross als der Erdball. Ein anderes Mal: dem dieses einst gelingen wird, setzt, Sterbliche, ihm ein ewiges Denkmal".

So kam es, dass JOHANN „durch die ganz eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt" die Parallelentheorie während seines Aufenthalts in der K. K. Ingenieur-Akademie zu Wien (1817—1822) zu seiner „Lieblingsbeschäftigung" machte; daneben hatte er übrigens hochfliegende Pläne, er wollte die ganze Mathematik von den Elementen bis zur Infinitesimalrechnung in einem grossen Werke darstellen, eine Idee, auf die er später zurückgekommen ist, ohne jedoch auch nur das auszuführen, was WOLFGANG in dem Tentamen geleistet hat.

„Zu einem möglichen Beweise des elften Axioms schlug" JOHANN „zuerst den Weg ein, zu beweisen, dass die mit einer Geraden gleichlaufende, das ist davon in einer Ebene überall gleich weit abstehende Linie, auch eine Gerade sei und behufs dessen die Eigenschaften einer solchen Linie für den Gegenfall zu untersuchen"; wir wissen jetzt, dass schon SACCHERI (1733) und LAMBERT

* A két BOLYAI. Maros-Vásárhely 1898. S. 413—414.

(1766) genau denselben Weg betreten hatten.* Im Besondern suchte JOHANN zu zeigen, dass „eine regelmässige Polygonallinie, welche in allen Brechungspunkten von einer Geraden gleich absteht", diese nothwendig schneiden müsse, und traf so mit seinem Vater zusammen, der diese Polygonallinie in seiner „Göttingischen Theorie der Parallelen" betrachtet hatte.**

Als JOHANN im Jahre 1820 seinem Vater von seinen Versuchen, das elfte Axiom zu beweisen, Mittheilung machte, schrieb ihm dieser folgenden merkwürdigen Brief.

„„Versuche die Parallelen auch Du nicht, ich bitte Dich; denn alle Deine Zeit würdest Du dabei verschwenden. Den Satz werdet ihr alle mitsammen nicht beweisen. Versuche die Ergründung der Parallelen weder auf dem mir mitgetheilten noch auf einem andern Wege. Versuche es nicht, nie wirst Du zeigen, dass die obere Gerade von Strecke zu Strecke um gleiche Winkel gegen die untere gedreht, diese je schneiden werde. Ich kenne alle Wege bis ans Ende; ich habe keine Idee angetroffen, die ich nicht schon bearbeitet hätte. Ich durchmaass diese grundlose Nacht, und alles Licht, alle Freude meines Lebens erstarb in ihr. Ich bitte Dich um Gottes Willen! lass ab von der Materie der Parallelen — entsetze Dich davor nicht weniger als vor welch' immer für einem lüderlichen Umgang, sie kann Dich ebenso aller Deiner Zeit, Gesundheit, Ruhe und Deines ganzen Lebensglückes berauben. Jene grundlose Finsterniss verschlingt gar wohl tausend NEWTONsche Riesenthürme. Nie wird sie erhellt auf Erden, und nie wird das arme Menschengeschlecht etwas vollkommen Reines besitzen, auch in der Geometrie nicht. Eine grosse und ewige Wunde ist dies in meiner Seele. Gott bewahre Dich davor, dass dies sich bei Dir jemals so tief einfresse. Dies benimmt einem die Lust zur Geometrie, zum irdischen Leben. Ich hatte mir vorgenommen, mich aufzuopfern für die Wahrheit, und bereit wäre ich gewesen, ein Märtyrer zu werden, um nur die Geometrie von diesem Flecken gereinigt dem menschlichen Geschlechte über-

* STÄCKEL und ENGEL, Die Theorie der Parallellinien von EUKLID bis auf GAUSS. Leipzig 1895.

** Briefwechsel GAUSS-BOLYAI, herausgegeben von SCHMIDT und STÄCKEL. Leipzig 1899. S. 67—78.

geben zu können. Ich habe riesenhafte Arbeiten unternommen, nichts unversucht gelassen. Ich lieferte weit Besseres, als bis dahin geleistet wurde, aber völlige Befriedigung fand ich nicht, da auch hier das: Si paullum a summo discesseris, vergis ad imum Anwendung findet. Als ich einsah, dass der Grund dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichbar ist, kehrte ich um, trostlos, mich und das arme Menschengeschlecht bejammernd. Lerne Du an meinem Beispiel. Ich blieb strebend die Parallelen zu erkennen unwissend. Das raubte alle Blüthe meines Lebens und meiner Zeit, ja darin wurzelte der Grund aller meiner nachherigen Fehler, und aus den trüben Wolken häuslicher Verhältnisse regnete es darauf. Hätte ich die Parallelen erfunden, ich würde, wenn es auch Niemand erfahren hätte, ein Engel geworden sein; ich hätte mich aus Verzweiflung weder auf die Dichtkunst noch auf eine Menge anderer Dinge, theilweise Tausendkünstelei, verlegt und wäre überhaupt ein ganz anderer Mensch geworden.““

„„Glaube mir! und lerne jetzt, trachte vorwärts zu kommen, zeichne auf, wo Du nicht verstehst, wo Du Mängel entdeckst, und gehe weiter; sonst kannst Du auf einen Stoff gerathen, der leicht Dein ganzes Leben verschlingt. Uebrigens freut es mich, dass Du die reine Wahrheit so liebst, wie auch zu sehen, dass Du solch' schönes Talent besitzest, womit Du anderwärts es weit bringen kannst, und desto mehr thut es mir leid, wenn Du der Parallelen wegen zu Grunde gehen müsstest. Ich glaube nicht, dass Du dieses besser zu machen im Stande seiest, als ich, so wie ich glaube, dass Du in anderen, höheren Theilen der Wissenschaft mehr leisten könntest als ich. Mache Dich über das, was ich nicht lieferte. Vergeuden wir nicht doppelte Kraft. Was von dem einen schon da ist, arbeite nicht der andere. Die Mängel, die Du in LAGRANGE [Theorie der Functionen] fandest, die sind zu beseitigen.““

„„Zusenden werde ich Dir meine eigenen Versuche, und dann wirst Du Dich davon überzeugen. Wird der Grundsatz angenommen, so ist alles Uebrige darin allerdings gut, aber keines meiner Axiome ist so beschaffen, wie es sein sollte. Unbegreiflich ist es, wie diese unabwendbare Trübung, diese ewige Sonnenfinsterniss, dieser Fleck in der Geometrie hat bleiben müssen,

diese ewige Wolke über der jungfräulich reinen Wahrheit. Ein immer in sich selbst sich zurückdrehender Kreis herrscht in dieser Materie. Ein Fluch liegt darauf — ein beständig hinlockendes Labyrinth — gleich dem Schatzgräber verarmt, der sich hiermit abgiebt, und bleibt unwissend. Du mögest welch' immer für einen scheinbaren Widerspruch herausbringen, es hilft alles nichts, zu einem Grundsatz kannst Du es nachher doch nicht annehmen. Ich setze zum Beispiel, dass man, wenn die Theorie der Parallelen unwahr ist, ein Dreieck oder auch ein Vieleck von beliebiger Seitenzahl bilden könne, dessen gesammte Winkelsumme kleiner als jeder gegebene Winkel ist*, und tausend derlei. Liesse sich nur beweisen, dass für eine wie immer kleine Summe der beiden inneren Winkel zwei Gerade von den Endpunkten einer wie immer langen Strecke sich schneiden müssen, alsdann weiss ich das Uebrige mit Strenge herzuleiten; allein so etwas darf man als Grundsatz nicht annehmen.""

„„Einige meiner neuen Axiome sind so bezaubernd, dass man auf den ersten Anblick geneigt sein könnte, sie für evident zu halten. Sie sind es aber nicht. Es giebt keinen vollkommen einfachen und hinlänglich klaren Grund für solch' eine Wissenschaft als die Geometrie. Hier richtet man mit der Grösse nichts aus, denn hier ist ein Ganzes gleich seinem Theile. So zum Beispiel ist, so wie auch schon $\overline{am} = \overline{bm}$ ist, wenn $u = v$ ist, hier in dieser Lage gleichwohl v ein Stück von u, und der ebenfalls unendliche Streifen $[nabp]$ bleibt übrig. Eben desshalb bin ich auch nicht im Stande zu beweisen, dass, sobald die Parallelentheorie falsch ist, wenn x bis zu 0 abnimmt, ab stets so lang sein kann, dass, obschon cab stets $= x$ ist, ac und bd beide auch unendlich verlängert sich nicht schneiden und dass somit in dem

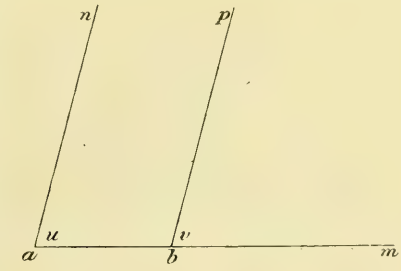


Fig. 1.

* [Vergl. hierzu Gauss' Brief an Wolfgang vom 16. December 1799, Briefwechsel Gauss-Bolyai, S. 36—37.]

zu 0 strebendem Winkel x der zu $2R$ strebende Winkel $2R - y$ und so in $2x$ der Winkel $4R - 2y$ ganz enthalten ist. Und all' dies ist noch nicht genug, aber damit Du nicht etwa versuchst, es auszufüllen, beendige ich es.""

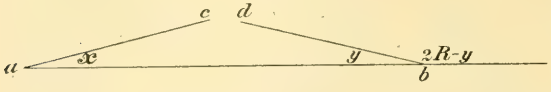


Fig. 2.

„„Wird ein beliebiges meiner Axiome gesetzt, so ist das Uebrige alsdann elegant, lichtvoll und streng in jedem meiner Beweise mit aller Euklidischen Strenge ausgeführt. Aber selbst dazu vermöchtest Du nur nach einem ungeheuren Zeitverluste zu gelangen, was bei mir bereits in aller Vollkommenheit vorhanden ist, aber sich in die Länge ziehend und schwierig. Vielleicht würdest Du auch Dein ganzes Leben damit vergebens zubringen. Mehr als ich würdest Du darin nicht leisten können. Ich drang wohl am tiefsten darein. In diesen Gegenden stehen Herkulessäulen. Gehe keinen Schritt weiter, sonst bist Du verloren!""

Diese „sehr nachdrückliche und kräftige Mahnung, die vielleicht geeignet schiene, selbst dem Kühnsten den Muth für immer zu benehmen", hatte bei JOHANN keinen Erfolg, „indem dadurch", wie er schreibt, „weit entfernt davon abgeschreckt zu werden, mein Interesse dafür nur um so lebhafter wurde, und meine Begierde und Energie nach Möglichkeit um jeden Preis darin durchzudringen auf das heftigste wuchs".

Für die weitere Entwickelung der Ideen JOHANNS wurde von wesentlicher Bedeutung sein freundschaftlicher Verkehr mit einem etwa fünf Jahre älteren, sehr fähigen jungen Mann, KARL SZÁSZ (1798—1853), der damals in Wien Erzieher beim Grafen Alexius Teleki war, ein Verkehr, der freilich nur kurze Zeit dauerte, da SZÁSZ bald, entweder noch im Jahre 1820 oder am Anfange des Jahres 1821, nach Ungarn zurückkehrte und Professor der Rechte am Collegium zu Nagy-Enyed wurde. Bei ihren Gesprächen über die Parallelentheorie, die während der „Sonn- und Feier-, überhaupt Ausgehtage" stattfanden, hatte SZÁSZ einmal „die sehr sinnreiche, echt geometrische und einer richtigen Entwicklung und Darstellungsweise der von dem XI. Axiom unabhängigen Raum-

lehre zur Grundlage dienende Idee, dass wenn die Gerade von einem Punkte [b] durch einen Punkt [c] einer andern Geraden [am] in der durch die beiden bestimmten Ebene um jenen Punkt [b] herumgedreht wird, dieselbe eine Zeit lang die andere Gerade [am] schneidend einmal, nach dem Ausdruck von Szász, **abspringe,** in welcher Lage [bn] er sie die nächste Parallele oder Nichtschneidende nannte". Johann sagte dafür asymptotische Parallele oder Asymptote.

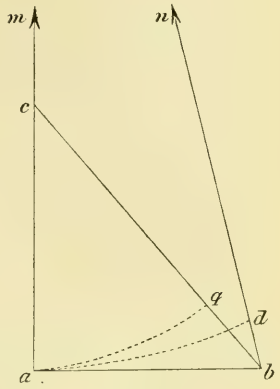


Fig. 3.

Ein anderes Mal stellte Szász die Frage, „ob daraus, dass bn Asymptote von am ist, nicht folge, dass $am = bn$ sei", was Johann „ihm allerdings sofort verneinte". Denn wenn ab auf am senkrecht steht und man immer auf cb von c aus $cq = ca$ abträgt, so wird der Punkt q, indem bc um b bis in die Lage bn gedreht wird, schliesslich in einen Punkt d übergehen, der, sobald abn ein spitzer Winkel ist, von b verschieden ausfällt. „Oberflächlich gesprochen" ist dann „bd der Unterschied der beiden unendlichen Geraden am, bn oder, streng ausgedrückt, die Grenze des Unterschiedes der beiden unendlich werdenden Seiten. Hieraus entstand sofort die Idee einer concreten räumlichen Grenzlinie der Kreisumfänge, wenn der Strahl unendlich wächst, welche gleichsam einen ähnlichen Bezug zu den Kreislinien von endlichen Strahlen und den mit einer geraden Linie gleichlaufenden Linien hat, wie die Parabel zu den Ellipsen und Hyperbeln". Aus diesem Grunde habe er, so behauptet Johann, schon 1823 den später von Gauss vorgeschlagenen Namen Paracykel für die Grenzlinie der Kreisumfänge gebildet.

Weiter berichtet er, dass die beiden Freunde „den engen Zusammenhang der Beschaffenheit dieser Kreislinie von unendlichem Halbmesser mit der Frage nach der Wahrheit des XI. Axioms instinktiv ahnten und nicht daran zweifelten, dass sich das XI. Axiom wohl streng rechtfertigen liesse, sobald es anginge, die Geradheit der Kreislinie von unendlichem Radius darzuthun", und dass sie

sich „eine grosse Fertigkeit darin erwarben, die Unzulänglichkeit der diesfalls nicht genügenden Sätze sogleich zu erkennen.“ „Aber hierbei“, so schliesst JOHANN, „blieben wir auch vollends stehen“.

Als JOHANN seinem Vater von diesen Speculationen Mittheilung machte, verhielt WOLFGANG sich durchaus ablehnend. „Was die Kreislinie vom unendlichem Radius betrifft, die verwarf er gänzlich, indem er sagte, dass davon Euklid das Gesicht abwenden würde, und mir glauben machen wollte, dass jene einem GAUSS und überhaupt jedem ganz gewiss anstössig vorkäme und entbehrlich sei.“ Er fügte noch dringendere Warnungen hinzu. „„Ich gestehe, ich erwarte auch von dem Absprunge Deiner Geraden nichts. Es kommt mir vor, ich habe auch diese Gegenden betreten; ich bin bei allen Klippen dieses höllischen todten Meeres vorbeigefahren und von überall kehrte ich mit zerschmettertem Mastbaum und zerfetzten Segeln zurück, und von da an datiere ich erst die Verderbniss meines Humors und meinen Fall. Unbesonnen setzte ich mein Leben und mein Glück hierauf — aut Caesar aut nihil. Wahrscheinlich hätte NEWTON selbst sein ganzes schätzbares Leben hiermit verschwendet. Ich betrachte dies als ein grosses Unglück. Ich bedauere Dich. Ich sehe, mein unglückliches Leben wiederholt sich in Dir. Ich sehe Dich gleichsam zwischen gefahrvollen Klippen, wo noch ein Jeder Schiffbruch litt, im finstern Sturm hilflos hin und her geschleudert. Es ist ein unheimliches Schlachtfeld, worauf ich jeder Zeit geschlagen wurde; eine allem Streben des Forschergeistes trotzende uneinnehmbare Felsenburg. In dieser Materie ist das ganze Leben nur eine ins Meer getauchte brennende Fackel. Es ist eine wahre Krankheit, eine Art von Narrheit, eine tyrannische Idee. Es ist gleich wie des Cirkels Quadratur, das Suchen des Steins der Weisen, das Goldmachen, das Schatzgraben. Alles dieses, wie ich merke auch die Parallelen bei besseren Köpfen, ist Krankheit. Bald zur Einsicht gelangend, dass Du hierin nichts gethan habest, dürftest Du gleich mir für immer Deine Lust verlieren. Lerne an meinem Beispiel hierin und in Betreff anderer Dinge. Hättest Du es wirklich herausgebracht, so würde ich mich freilich mehr darüber freuen, als über eine Herrschaft. Da ich dieses aber schlechterdings nicht glaube, so fürchte ich, Du verlierst Dein Alles auf eine Lotterie von einer Million gesetzt.““

„„Wäre es mir ehemals geglückt, so wäre ich ein ganz anderer Mensch geworden, weder hätte ich zweimal geheirathet noch mich auf die Gärtnerei, auf die Dichtkunst, noch auf die Hafnerei verlegt, meine verlorene Lust anderswo suchend. Ich wäre moralisch besser geworden und wäre meinem Amte und meinem Haushalte ganz anders vorgestanden. Ist man glücklich, so macht man andere leichter glücklich; was soll aus einer Quelle herausfliessen, die selbst trocken ist? Verliere nicht eine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet ganz das Leben. Selbst durch das ein Jahrhundert dauernde Kopfzerbrechen von hundert grossen Geometern ist es schlechterdings unmöglich ohne ein neues Axiom zu erweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideeen diesfalls erschöpft zu haben.““

„„Hätte Gauss auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über das elfte Axiom zugebracht, so wären die Lehre von den Vielecken, seine Theoria motus corporum coelestium und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen, dass er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äusserte mündlich und schriftlich, dass er fruchtlos darüber nachgedacht habe. Meine Ideen gefielen ihm überhaupt gar sehr, und er machte mich darauf aufmerksam, welch' hochwichtige Sache die Materie der Parallelen sei, obschon er davon doch keineswegs befriedigt war. In den Elementen der Arithmetik und Geometrie war damals Gauss (übrigens viele Thurm-Etagen über mir erhaben) weniger fest als ich durch mich selbst, aber ihm waren die höheren Rechnungen bereits eine Spielerei, wo ich noch nicht einmal eine Idee davon hatte.““

Die vorstehenden Aeusserungen Wolfgangs stimmen durchaus überein mit den betreffenden Stellen in seiner Autobiographie vom Jahre 1840 und in seinem Briefe an Sartorius von Waltershausen vom 13. Juli 1856.* Sie werden vervollständigt durch eine Aufzeichnung von Johann, die allerdings noch später, jedenfalls erst nach 1856 abgefasst ist.

„In Jena [Herbst 1796] an der Saale spazierend fing er

* Vgl. den Briefwechsel Gauss-Bolyai, S. 151—152.

[WOLFGANG] an, sich zu fragen, auf welchem Grunde denn doch sein Wissen beruhe; und da nahm er wahr, dass er eigentlich noch gar nichts gründlich wisse; und da sank er zu seinem unbeschreiblichen Schmerz von einem Fanatismus in Atheismus; welcher unglückliche Zustand jedoch nicht lange dauerte, indem er bald eine weit bessere, reinere Vernunft-Religion bildete. Und nun erst fing er an, sich auf Mathematik zu verlegen und die Gründe davon zu erforschen; suchte klare und allgemeine Begriffe nebst andern Grundlehren von +, —, Multiplication, Division, Potenz, ... gerader Linie und hauptsächlich einen Beweis des elften Euklidischen Axioms. Und fand in der That überall weit Besseres."

„Als er von Jena nach Göttingen kam, traf er mit GAUSS zufällig bei dem Professor SEYFFER zusammen und äusserte sich da freimüthig und entschieden über die Leichtfertigkeit der Behandlung der Mathematik. Kurz darauf begegnete er dem GAUSS am Walle im Spazierengehen. Sie näherten sich einander. Mein Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken bezugs einer Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des elften Axioms, und der schon damals zum Kolosse in den höheren Regionen der Wissenschaft, besonders der Zahlenlehre, emporgewachsene GAUSS brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte darüber aus: »Sie sind ein Genie! Sie sind mein Freund!«, worauf sogleich auch das Band der Bruderschaft folgte."

„Uebrigens ist es durchaus irrig, wenn, wie es in dessen durch Herrn Professor SARTORIUS zu Göttingen im Jahre 1856 gelieferten Lebensbeschreibung S. 17 steht, GAUSS geäussert hat, WOLFGANG BOLYAI sei der einzige gewesen, der in seine metaphysische Ansicht der Mathematik einzugehen wusste, indem erstens GAUSS sein ganzes Leben hindurch mit seiner Arbeit, so lange sie nicht im Drucke das Tageslicht erblickte, sehr zurückhaltend war und somit meinem Vater auch gar nicht derlei mittheilte, ausser dass er auf die mitgetheilte Ansicht meines Vaters über die Gerade erwiderte: »Ja wahrlich, die Gerade wird schändlich behandelt; sie ist in der That die Linie, welche sich in sich selbst dreht«. Worauf ich jedoch be-

merke, dass dieser Ausdruck fehlerhaft ist, indem eine gerade Linie sich gar nicht um zwei ihrer Punkte drehen kann. Zweitens hat gerade mein Vater ihm seine Ansicht über die Begründung der Mathematik eröffnet, und allem Anschein nach ist GAUSS selbst dann und dadurch erst näher aufmerksam gemacht worden auf diesen hochwichtigen Gegenstand, was ja auch kein Wunder ist, indem GAUSS sehr früh sich hauptsächlich mit der Zahlenlehre befasst hat, die auch bis ans Ende sein Lieblingsgegenstand blieb, indem er sie, obschon mit Unrecht, Königin der Mathematik nannte."

Gewiss sind JOHANNS Worte, aus denen ein Hass spricht, dessen Feuer unter langjähriger Asche noch immer glomm, nur mit Vorsicht zu benutzen, liefert er doch, indem er GAUSS' Definition der Geraden mittheilt, gegen seinen Willen einen Beweis dafür, dass dieser schon vor seinem Zusammentreffen mit WOLFGANG BOLYAI über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht hatte. Allein in Verbindung mit den Aeusserungen seines Vaters lässt sich daraus doch mit Sicherheit schliessen, dass der Gedanke einer in sich begründeten, logisch widerspruchsfreien Raumlehre, die unabhängig von dem elften Axiom gilt, nicht etwa von GAUSS aus durch Vermittelung von WOLFGANG auf JOHANN übertragen, sondern von JOHANN BOLYAI selbständig gefunden worden ist. Ein weiterer Beweis hierfür liegt darin, dass JOHANN in der Zeit nach 1820 zunächst noch ganz von dem Bestreben beherrscht war, einen Beweis für das elfte Axiom zu finden. Indem er die Folgerungen, die sich aus den Annahmen von Asymptoten und Paracykeln ergaben, immer weiter trieb, hoffte er auf einen Widerspruch zu stossen und so die Unzulässigkeit dieser Annahmen zu zeigen. Aus den Briefen an seinen Vater geht hervor, dass er sogar eine Zeit lang geglaubt hat, einen solchen Widerspruch gefunden zu haben, indem er „mit so vielen Geometern des Erdballs das Schicksal hatte, aus Uebereilung eine Lücke zu übersehen und somit zu fallen"*. Als er so „aus seinem falschen und zu frühzeitigem Himmel herabgestürzt" wurde, war er „durch

* Ueber den Beweisversuch selbst werde ich an anderer Stelle ausführlich berichten.

Wahrnehmung seines Fehlers der Wahrheit und dem Ziele, wenigstens in negativem Sinne, um desto näher gerückt", denn er gelangte jetzt zu der Ueberzeugung, „dass man der Natur keinen Zwang anthun, die Natur nach keinen blind gebildeten Hirngespinsten modeln, sondern vernünftiger und natürlicher Weise eben die Wahrheit oder Natur selbst sehen wollen muss und dass man zufrieden sein müsse mit der bestmöglichen Darstellung".

Dass JOHANN sich nunmehr die Aufgabe stellte, die „absolute Raumlehre" in derselben Weise auszubilden, wie das bei der Euklidischen Geometrie bereits geschehen war, ist gewiss begünstigt worden durch den Einfluss seines Vaters WOLFGANG, der „die Unzulänglichkeit seiner eigenen Untersuchungen fühlend und auch dadurch unbefriedigt, zuletzt an der Möglichkeit das elfte Axiom zu beweisen zweifelte". Ja WOLFGANG „behauptete, in der That die Wahrheit erahnend, jedoch ohne Beweis, die Unmöglichkeit das elfte Euklidische Axiom zu beweisen". Mit Recht sagt JOHANN „ohne Beweis", denn WOLFGANG wusste seine Behauptung nur damit zu begründen, „„dass alles dem elften Axiom Widersprechende sich im Unendlichen verbergen könne und dass, wo man zuerst von dem Gesetz des Schnittes (nämlich gerader Linien in einer Ebene) zu handeln beginnt, dieses Gesetz beliebig angenommen durch das Vorhergegangene nicht zerstört werden könne, da darin von dem Gesetze des Schnittes noch nichts enthalten ist, also daraus auch des Schnittes Gesetz nicht abgeleitet werden kann. Die Unwahrheit des elften Axioms und was daraus folgt vertrage sich mit allen sonstigen Sätzen der Geometrie"". In demselben Sinne ist eine Aeusserung WOLFGANGS aufzufassen, die sich in seinem Briefe vom 30. April 1835 an GAUSS findet: „„Ich kann sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Sein als das Nichtsein dieses Satzes mit den übrigen Euklidischen Axiomen gleich bestehen könne . . .; welches ich schon seit vielen Jahren her weiss.""

JOHANN betont mit Nachdruck, dass GAUSS sich in seiner Jugend zu der Frage nach der Beweisbarkeit des elften Axioms nicht unbedingt verneinend gestellt habe. „Um so mehr muss man sich wundern", sagt er, „dass ein GAUSS, der doch ohne Zweifel einer der allergrössten Mathematiker aller Zeiten des Erd-

balls ist, sich in einem an meinen Vater als seinem Jugendfreunde gerichteten Briefe noch Hoffnung in dieser Hinsicht machte, indem er sich im Jahre 1804 darüber so äusserte: »Vielleicht wird es mir einst gelingen diese Klippen zu umgehen«".

„Auf diesem Wege", so berichtet JOHANN über den weiteren Verlauf seiner Untersuchungen, „drang ich zwar glücklich vor; da ich jedoch wegen der übrigen Berufsstudien in der Ingenieur-Akademie und später seit meinem Austritte und Dienstantritte [1822] nur einen unbeträchtlichen Theil meiner Zeit dieser meiner Lieblings-Wissenschaft und -Untersuchung widmen konnte, so geschah es, dass ich erst im Jahre 1823 selber dem Wesen nach gänzlich durchdrang, obschon auch nachher manche Vervollkommnungen hinsichtlich Materie und Form hinzukamen". Was JOHANN im Jahre 1823 fand, war der Lehrsatz des § 29 des Appendix, wo es sich darum handelt, die Beziehung zwischen dem Lothe y und dem zugehörigen Parallelwinkel u (in der Bezeichnung von LOBATSCHEFSKIJ $\Pi(y)$) zu finden, eine Relation, die sofort den Zugang zu der ganzen nichteuklidischen Trigonometrie eröffnet. In einem Briefe, den er am 3. November 1823 aus Temesvár an seinen Vater richtete, kündigte er diesem seine Entdeckung an.* „Mein Entschluss steht fest, ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe und es die Umstände erlauben; gegenwärtig habe ich es noch nicht, aber der Weg, den ich befolgt habe, hat beinahe sicher das Erreichen des Zieles versprochen; ich habe das Ziel noch nicht, aber ich habe so grossartige Sachen hervorgebracht, dass ich selbst verblüfft war, und dass es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen. Wenn Sie es sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur so viel sagen: dass ich aus Nichts eine neue Welt geschaffen habe. Alles was ich früher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu dem Thurme. Ich bin überzeugt,

* Diesen von Herrn Professor MARTIN SCHMIDT in dem Nachlass der BOLYAI im Jahre 1884 aufgefundenen Brief, dessen Original sich in der Bibliothek des Ev.-ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely befindet, habe ich 1897 in deutscher Uebersetzung in den Math. Annalen, Bd. 49, S. 155—156 veröffentlicht. Der ungarische Originaltext wurde 1898 abgedruckt von BEDŐHÁZI, A két BOLYAI, S. 403.

dass es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte."

WOLFGANG äusserte schon damals den Wunsch JOHANNS Parallelentheorie in sein Tentamen aufzunehmen, dessen Druck er vorbereitete. „Er ertheilte den Rath, dass, wenn es wirklich gelungen ist, mit der öffentlichen Bekanntmachung sich aus einem zweifachen Grunde zu beeilen sei, erstens weil die Ideen leicht in einen andern übergehen, der es sodann eher herausgiebt, zweitens liege auch darin einige Wahrheit, dass manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden; gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht hervorkommen und, da alles wissenschaftliche Streben nur ein grosser Krieg ist, worauf ich nicht weiss, wann der Friede folgen wird, so muss man wenn man es vermag siegen, indem hier dem ersten der Vorrang zukommt." Diese Ahnung hat sich in wunderbarer Weise erfüllt: bald darauf betraten TAURINUS und LOBATSCHEFSKIJ denselben Weg wie JOHANN und gelangten ebenfalls zur nichteuklidischen Trigonometrie.

Leider geben uns die Aufzeichnungen JOHANNS über die nächsten Jahre, in denen die „absolute Raumlehre" ihre Ausbildung erhielt, nur spärlichen Aufschluss. Wir erfahren nur, dass er bereits im Jahre 1825 (an einer anderen Stelle sagt er 1826) seinem ehemaligen Lehrer der Mathematik an der Ingenieur-Akademie in Wien dem damaligen Hauptmann, späteren General JOHANN WALTER VON ECKWEHR (1789—1857) „einen schriftlichen Aufsatz übergab, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt wird und der sich wahrscheinlich noch in hochdessen Händen befindet".

Als JOHANN bei einer Zusammenkunft seinem Vater, wahrscheinlich im Jahre 1829, den Entwurf der „absoluten Raumlehre" vorlegte, fand er nicht die unbedingte Anerkennung, auf die er gerechnet hatte, und es kam in Folge dessen zwischen ihnen zu einem bedauerlichen Zerwürfniss, das durch weitere Streitigkeiten verschärft, beiden, die sich im Grunde eng zusammen gehörig fühlten, viele Jahre des Lebens verbittert hat. „Er suchte den Werth auf alle erdenkliche Weise zu schmälern und declamierte mit aller Ereiferung, derer er fähig war, dagegen, wovon ich die Ursache in dem Unvermögen suchte, das Wesen der Sache zu

penetrieren. So zum Beispiel sagte er nach meinen Explicationen mit Geringschätzung, die aber auf ihn zurückfiel, dass dieses nur eine Ausarbeitung des antieuklidischen Systems sei. Gesetzt auch, es wäre nur das gewesen, so wäre es ihm nicht als eine Geringfügigkeit vorgekommen, wenn sein Verstand es heller aufgefasst, sein Gemüth freier gewesen wäre. Auch behauptete er ganz verzweifelt, dass es nur zwei Systeme (denkbar subjective successive) gebe, nämlich entweder das Euklidische oder, wenn dieses nicht ist, ein anderes, worin die Grösse des Parallelwinkels* absolut bestimmt sei, und liess sich diese Idee nicht aus dem Kopfe jagen und konnte es ungeachtet aller meiner auf das möglichst deutliche dargestellten Beweisgründe nicht einsehen, dass es doch unzählig viele hypothetische Systeme geben könne, zwischen welchen man das wahre auszuwählen nicht im Stande ist, indem man zum Beispiel bei ein und derselben Grundlinie ab und demselben einen inneren Winkel bam, bei $bn /\!/\!/ am$, dem andern inneren Winkel abn offenbar von 0 an (ausschliesslich) bis $2R - bam$ (einschliesslich) jede beliebige Grösse geben kann, wie es umständlicher in der Lehre selbst erklärt wird."

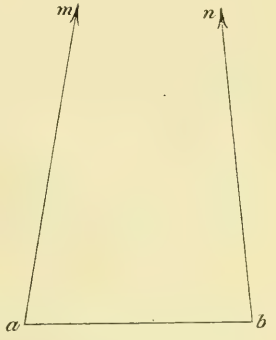


Fig. 4.

„Dass der Buchstabe e in den Ausdrücken häufig erscheint, überraschte ihn, und er fragte noch nach der Durchlesung, ob derselbe nothwendig vorkomme. Ich bejahte es, gab ihm aber auch zu verstehen, dass in derlei Ausdrücken wie zum Beispiel $e^{\frac{x}{i}}$ der Buchstabe e insofern nicht wesentlich ist, als man dafür auch jede andere Länge setzen kann, wenn man nur statt i auch die entsprechende Länge wählt, und darauf fiel seine Freude über das Paradieren des e als eine Spielerei und versetzte darauf: Ja, ja! es dringt sich in diese Lehre e nicht nothwendig auf. Dem-

* [Es verdient, bemerkt zu werden, dass Johann Bolyai an dieser Stelle, die aus der Zeit zwischen 1833 und 1835 stammt, das Wort „Parallelwinkel" gebraucht, das Lobatschefskij in seinen Geometrischen Untersuchungen vom Jahre 1840 ebenfalls anwendet.]

nach hatte er auch von der hohen Wichtigkeit der durch i bezeichneten Länge keine entfernte Idee, hielt es nur für eine Willkürlichkeit." — — —

„Zur Einsicht gelangt, dass hier mit Gründen (Vernunft sowohl als Verstand) nichts auszurichten sei, hoffte ich ihm nunmehr durch Autorität die gebührende Achtung vor den Asymptoten einzuflössen. Ich nannte den Einen GAUSS bemerkend, dass dieser colossale Geometer gewiss nicht nur leicht verstehen, sondern auch Beifall schenken und den wahren Werth davon anerkennen werde, und schlug vor, es diesem grossen Manne zuzusenden."

WOLFGANG ging auf den Vorschlag ein und veranlasste, dass JOHANN „das Wesen der Sache in lateinischer Sprache verfasste." Zu Anfang des Jahres 1831 übergab JOHANN den so entstandenen Appendix seinem Vater, der ihn auf JOHANNS Kosten drucken liess und im Juni 1831 ein Exemplar an GAUSS schickte. Gleichzeitig sandte er nach 16jähriger Pause einen Brief an GAUSS. „„Dem GAUSS gab ich"", meldet er am 17. September 1831 seinem Sohne, „„eine kleine klare Idee von Deiner Arbeit, damit er nicht im Voraus sich grause vor der Materie, aber es fiel mir nicht einmal ein, dass er das Werkchen nicht zugleich mit dem Briefe erhalte. Im Spätherbst werde ich mein Werk (das Tentamen) sowohl Dir als dem GAUSS schicken."" Da das „Werkchen" wegen der Choleraepidemie nicht an GAUSS gelangt war, sandte WOLFGANG im Januar 1832 ein zweites Exemplar, das sich noch gegenwärtig in GAUSS' Nachlass befindet. GAUSS antwortete am 6. März 1832.

„Wenn ich damit anfange", so äusserte er sich über die Arbeit JOHANNS, „dass ich solche nicht loben darf: so wirst Du gewiss einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Aeusserste überrascht".

„Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der

übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge."

„Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann, und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."

Eine Abschrift der Antwort theilte WOLFGANG seinem Sohne mit und fügte hinzu: „„GAUSSEN's Antwort hinsichtlich Deines Werkes ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre. Ein guter Freund sagte, es wäre eine grosse Satisfaction."" Ganz anders wirkten GAUSS' Aeusserungen auf Johann. Er konnte und wollte zuerst nicht glauben, dass GAUSS unabhängig von ihm und lange vor ihm ebenfalls zur nichteuklidischen Geometrie gelangt sei, wobei er sich besonders auf dessen schon angeführte Aeusserung vom Jahre 1804 berief: Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt gestatten, und so kam er auf den hässlichen Verdacht, sein Vater habe die im Appendix niedergelegten Ideen an GAUSS verrathen und dieser wolle ihn nun der Priorität, auf jene Ideen gekommen zu sein, berauben.* Aber auch nachdem er sich von der Grundlosigkeit dieser Unterstellung überzeugt hatte, war er keineswegs mit GAUSS' Verhalten ihm gegenüber einverstanden. Dass GAUSS das seinem Vater im Jahre 1804 gegebene Versprechen: „Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen,

* KOLOMAN SZILY, Adatok Bolyai Farkas életrajzához. Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Bd. XI. Heft 9. Budapest 1884.

so viel in meinen Kräften steht" dem Sohne nicht erfüllt und JOHANNS Appendix keiner öffentlichen Anerkennung gewürdigt hat, bildete für diesen eine Kränkung, die er nie hat verwinden können. Aus einer längeren Kritik des GAUSS'schen Briefes mögen die folgenden Ausführungen hier mitgetheilt werden.

„Nach meiner und, wie ich fest überzeugt bin, jedes Unbefangenen Ansicht, erscheinen alle von GAUSS angeführten Gründe, warum er von seinen eigenen diesfälligen Arbeiten bei seinen Lebzeiten gar nichts habe wollen bekannt machen, kraftlos und nichtig zu sein, indem es ja in der Wissenschaft, wie im wirklichen Leben selbst, sich stets gerade darum handelt, nothwendige und gemeinnützige, aber noch unklare Dinge gehörig aufzuklären und den noch fehlenden oder vielmehr schlummernden Sinn für Wahrheit und Recht zu wecken, gehörig zu stählen und zu fördern. Der Sinn für Mathematik überhaupt ist ja, zu sehr grossem allgemeinen Schaden und Unheile, leider nur bei wenigen Menschen rege geworden; und aus einem solchen Grunde oder unter einem solchen Vorwande hätte GAUSS consequenter Weise wohl noch einen bedeutenden Theil seiner vortrefflichen Arbeiten für sich behalten müssen. Und der Umstand, dass es leider selbst unter den Mathematikern, und noch dazu unter berühmten derlei, noch viele oberflächliche giebt, kann ja doch für keinen Vernünftigen einen Grund abgeben, demnach fortan nur Oberflächliches und Mittelmässiges zu leisten und die Wissenschaft lethargisch in dem ererbten Zustande zu belassen. Ein derlei Ansinnen könnte nur geradewegs widernatürlich und ein reiner Unsinn genannt werden; und demnach kann es nur um so unangenehmer auffallen, wenn GAUSS auf den Appendix wie auch auf das ganze Tentamen statt seine gerade, biedere, freimüthige Anerkennung des hohen Werthes und Aeusserung seiner hohen Freude und Theilnahme darüber auszusprechen und statt nach der Kunst zu trachten, der guten Sache gebührenden Eingang zu verschaffen, dem vielmehr auszuweichen sich bemühet und sich beeilt in fromme Wünsche und Leidwesens-Aeusserungen über den Mangel an gehöriger Bildung sich zu ergiessen. Darin besteht das Leben und Wirken und Verdienst wahrlich nicht!"

Im Juni 1833 wurde JOHANN BOLYAI als Capitain-Lieutenant pensioniert und kehrte aus seiner Garnison Olmütz nach Maros-Vásárhely zurück. Ueber die geometrischen Untersuchungen, die er von da ab bis zu seinem 1860 erfolgten Tode angestellt hat, soll auf Grund der nachgelassenen Papiere in einer zweiten Note berichtet werden.

2.

UEBER DAS GAUSS'SCHE PENTAGRAMMA MIRIFICUM.

Von LUDWIG SCHLESINGER in Klausenburg.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 19. Juni 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö". (Math. und Naturw. Anzeiger) Band XVII, pp. 526—534.

In dem von SCHERING herausgegebenen GAUSS'schen Nachlasse (Werke, Bd. III, pag. 481 sq.) wird als *Pentagramma mirificum* ein sphärisches Pentagon behandelt, welches (vgl. a. a. O. pag. 495) dahin charakterisiert werden kann, dass seine fünf Diagonalen Quadranten sind. GAUSS gelangt zu dem Ergebnisse, dass die Bestimmung der Ecken eines solchen Pentagons von der Fünftheilung der elliptischen Functionen abhängt.

Da das PONCELET'sche Schliessungsproblem im Falle eines Fünfecks auf die Verfünffachung der elliptischen Functionen führt, ist es von vornherein wahrscheinlich, dass zwischen diesem Probleme und dem Pentagramma mirificum ein Zusammenhang besteht; da ferner die charakteristische Eigenschaft des Pentagramma bei einer beliebigen Biegung der Kugel erhalten bleibt, liegt es nahe, statt der Kugel eine beliebige Fläche von constantem positivem Krümmungsmaasse zu Grunde zu legen. Da, wie es scheint, diese beiden Gesichtspunkte bisher noch nicht hervorgehoben worden sind, und namentlich die Durchführung des letzteren zu einigen Formeln führt, die auch für anderweitige Untersuchungen von Interesse sein können, möge es erlaubt sein, in der vorliegenden Note einige auf das Pentagramma bezügliche Entwickelungen zusammen zu stellen.

I.

Wir legen, wie bereits bei einer früheren Gelegenheit*, für eine Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k den Ausdruck

$$ds = 2\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{(p^2 + q^2 + k)^2}}$$

des Linienelementes zu Grunde, dann werden die geodätischen Linien durch die Gleichung**

(1) . . . $\mathfrak{a}(p^2 + q^2 - k) + 2\mathfrak{b}p + 2\mathfrak{c}q = 0,$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt.

Durch einfache Rechnung findet man, dass die zwischen zwei Punkten mit den Coordinaten (p_1, q_1), (p_2, q_2) gemessene Bogenlänge $s_{1,2}$, der durch diese Punkte gelegten geodätischen Linie (der geodätische Abstand der beiden Punkte) durch die Formel

$$\cos\sqrt{k}\,s_{1,2} = \frac{(k - p_1^2 - q_1^2)(k - p_2^2 - q_2^2) + 4k(p_1p_2 + q_1q_2)}{(k + p_1^2 + q_1^2)(k + p_2^2 + q_2^2)}$$

gegeben wird, und hiernach erscheint es zweckmässig, neben p, q noch

(2) . . . . . $t = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p^2 - q^2)$

als Homogeneitätscoordinate einzuführen, wodurch, wenn

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p_1^2 - q_1^2),$$

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p_2^2 - q_2^2)$$

gesetzt wird, der obige Ausdruck die elegante Gestalt

(3) . . $\cos\sqrt{k}\,s_{1,2} = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + t_1t_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + t_1^2}\,\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + t_2^2}}$

annimmt, wie man mit Rücksicht auf die Identität

$$4k(t^2 + p^2 + q^2) = (k + p^2 + q^2)^2$$

leicht erkennt.

---

* Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, Band II, 2. (Leipzig, 1898), pag. 95.

** a. a. O. pag. 97, Gleichung (7).

Da die Quotienten

$$\frac{p}{t}, \frac{q}{t}$$

im Wesentlichen mit den sogenannten BELTRAMI'schen Coordinaten übereinstimmen (CRELLE's Journal, Bd. 121, pag. 174), wollen wir (p, q, t) als *homogene BELTRAMI'sche Coordinaten* bezeichnen.

Der Uebergang von dem Coordinatensysteme (p, q) zu einem ebenso beschaffenen (p', q') d. h. zu einem solchen, in welchem der Ausdruck für das Linienelement wieder

$$2\sqrt{\frac{dp'^2 + dq'^2}{(p'^2 + q'^2 + k)^2}}$$

ist, entspricht einer Verschiebung der Fläche in sich selbst, also (vergl. Handbuch, II, 2, pag. 101) einer auf die complexe Grösse

$$\eta = p + qi$$

auszuübenden projectiven Substitution, die den Ausdruck

$$p^2 + q^2 + k$$

von einem positiven Factor abgesehen ungeändert lässt. Interpretieren wir (p, q) als rechtwinkelige Coordinaten in einer Ebene, so lässt sich bekanntlich jede projective Substitution von η als Aufeinanderfolge zweier *Spiegelungen* in Bezug auf Kreise dieser Ebene darstellen.* Wenn diese beiden Kreise insbesondere den Kreis

$$p^2 + q^2 + k = 0$$

rechtwinkelig schneiden, so ist die resultierende projective Substitution eine Verschiebung in dem a. a. O. charakterisierten Sinne (vergl. Handbuch, Band II, 2, pag. 87). Eine Spiegelung in Bezug auf einen solchen Kreis, d. h. in Bezug auf einen Kreis, dessen Gleichung die Form (1) oder, wie wir jetzt, mit nicht in Betracht kommender Beschränkung der Allgemeinheit, schreiben wollen,

$$p^2 + q^2 - k + 2\alpha p + 2\beta q = 0$$

besitzt, wird durch die Formeln:

---

* POINCARÉ, Acta Mathem. III, pag. 51.

$$p' + \alpha = (p + \alpha)\,\frac{k + \alpha^2 + \beta^2}{(p+\alpha)^2 + (q+\beta)^2},$$
$$q' + \beta = (q + \beta)\,\frac{k + \alpha^2 + \beta^2}{(p+\alpha)^2 + (q+\beta)^2}$$

dargestellt. Diese Formeln lassen sich in homogenen BELTRAMI'schen Coordinaten so schreiben:

$$(4)\quad \begin{cases} \varrho p' = \dfrac{k+\beta^2-\alpha^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p - \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho q' = \dfrac{-2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{k+\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho t' = \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{\alpha^2+\beta^2-k}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \end{cases}$$

woselbst

$$\varrho = \frac{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2},$$
$$t' = \frac{1}{2\sqrt{k}}\,(k - p'^2 - q'^2)$$

gesetzt wurde. Die rechten Seiten von (4) liefern eine symmetrische orthogonale Substitution von der Determinante -1, und zwar gleich in der Form, die sich aus der bekannten EULER'schen Parameterdarstellung (vergl. z. B. BALTZER, Determinanten, 5. Aufl., pag. 194) durch Specialisierung ergiebt.

Durch Composition zweier Substitutionen von der Form (4) erhalten wir demnach die allgemeinste Transformation eines Systems homogener BELTRAMI'scher Coordinaten in ein anderes, oder q. i. e. die Darstellung der allgemeinsten Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k in sich selbst. Da dieselbe für die Quotienten

$$\frac{p}{t},\ \frac{q}{t}$$

offenbar eine projective Substitution ist und überdies nur die Bedingung zu erfüllen hat, dass sie den Kreis

$$p^2 + q^2 + k = 0$$

oder

$$p^2 + q^2 + t^2 = 0$$

nicht verändert, so erkennt man a priori, dass diese Transformation, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor, einer auf p, q, t aus-

zuübenden orthogonalen Transformation u. zw. der allgemeinsten solchen Transformation gleich kommen muss. Dies kann man auch aus den Formeln (4) verificieren und erkennt zugleich, dass die resultierende orthogonale Transformation die Determinante 1 besitzt; das letztere hängt mit dem Umstande zusammen, dass (vergl. Handbuch, Band II, 2, pag. 90) eine projective Substitution von $p + qi$, die sich aus Spiegelungen von der Art wie (4) zusammensetzt, stets eine *positive* ist. Wir fassen dies letztere Ergebniss in den folgenden Satz:

Eine Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k stellt sich in homogenen Beltrami*'schen Coordinaten in der Form*

$$(5) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varrho p' = \alpha_{11} p + \alpha_{12} q + \alpha_{13} t, \\ \varrho q' = \alpha_{21} p + \alpha_{22} q + \alpha_{23} t, \\ \varrho t' = \alpha_{31} p + \alpha_{32} q + \alpha_{33} t, \end{cases}$$

dar, wo die (α_{ik}) die Elemente einer orthogonalen Transformation mit der Determinante $+1$ bedeuten, und

$$\varrho^2 = \frac{p^2 + q^2 + t^2}{p'^2 + q'^2 + t'^2}$$

ist; einer Spiegelung in Bezug auf eine geodätische Linie

$$p^2 + q^2 - k + 2\alpha p + 2\beta q = 0$$

entspricht dagegen die symmetrische orthogonale Transformation (4) *mit der Determinante* -1.

Dieser Satz ist von Wichtigkeit, wenn man in einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, deren homogene Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und seinen conjugierten Werthen gebildete bilineare Form ungeändert lässt, den realen Theil und Coëfficienten von i des Integralquotienten gesondert untersucht. Ich hoffe darauf an anderer Stelle zurückkommen zu können.

II.

Es sei nun die Krümmung k unserer Fläche gleich Eins. Wir nehmen auf derselben fünf Punkte

$$(p_i, q_i, t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

von der Beschaffenheit, dass die Diagonalen des von diesen Punkten gebildeten Pentagons Quadranten sind, d. h. also, wenn (i, k) den geodätischen Abstand der durch die Coordinatenindices i, k charakterisierten Punkte bedeutet, so ist

$$(i,\ i+2) = \frac{\pi}{2}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wo die Indices, wie auch stets im Folgenden, modulo 5 zu reducieren sind. Mit Rücksicht auf die Formeln (3) der Nr. I haben wir demnach

$$(1) \quad \ldots \quad p_i p_{i+2} + q_i q_{i+2} + t_i t_{i+2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Ein solches Fünfeck nennen wir mit GAUSS ein *Pentagramma mirificum.*

Interpretieren wir (p, q, t) als homogene CARTESIUS'sche Coordinaten in einer Ebene, so besagen die Gleichungen (1), dass die fünf Punkte

$$(p_i,\ q_i,\ t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ein *Polfünfeck* in Bezug auf den Kegelschnitt C

$$p^2 + q^2 + t^2 = 0$$

constituieren, d. h. ein Fünfeck, in welchem jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Legen wir durch die fünf Punkte einen Kegelschnitt C_1 und construieren dessen Polarfigur C_2 in Bezug auf C, so ist das betrachtete Fünfeck dem Kegelschnitte C_1 eingeschrieben und dem Kegelschnitte C_2 umschrieben. D. h.:

*Einem Pentagramma mirificum entspricht stets ein ebenes Poncelet'sches Schliessungsproblem für den Fall eines Fünfecks.**

Die Kegelschnitte C_1, C_2 haben die Eigenschaft, dass die Gleichung des einen in Punktcoordinaten mit der Gleichung des anderen in Liniencoordinaten übereinstimmt, sie werden also simultan auf ihre Hauptaxen transformiert. Gehen wir nun von (p, q, t) zu einem anderen System (u, v, w) homogener BELTRAMI'scher Coordinaten über, d. h. setzen wir (u, v, w) proportional

* Vergl. GUNDELFINGER, Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte (1895), pag. 423, auf welche Stelle der Herr Verfasser mich während der Drucklegung der vorliegenden Note brieflich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

den rechten Seiten einer orthogonalen Transformation der (p, q, t), so können wir diese orthogonale Transformation in sehr bekannter Weise so einrichten, dass die Gleichung des Kegelschnitts C_1 in (u, v, w) die Form

$$s_1 u^2 + s_2 v^2 + s_3 w^2 = 0$$

erhält; die Gleichung von C_2 lautet dann

$$s_2 s_3 u^2 + s_3 s_1 v^2 + s_1 s_2 w^2 = 0.$$

Die eventuell möglichen singulären Fälle lassen wir der Einfachheit halber beiseite. Da wir es naturgemäss in C_1 mit einem realen Kegelschnitt zu thun haben, sind von den Grössen s_1, s_2, s_3 etwa zwei positiv, die dritte negativ; sei die Bezeichnung so gewählt, dass

$$s_3 < 0, \; s_1 > 0, \; s_2 > 0.$$

Wir schreiben dann die Gleichungen von C_1, C_2 in der Form

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - w^2 = 0,$$
$$A^2 u^2 + B^2 v^2 - w^2 = 0,$$

und können offenbar, ohne dadurch die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken,

$$A > B > 1$$

voraussetzen. C_1, C_2 sind dann concentrische und coaxiale Ellipsen, von denen C_2 ganz innerhalb C_1 liegt.

Führen wir in der bei der Behandlung des Schliessungsproblems gebräuchlichen Weise* die zu der Ellipse C_2 gehörige excentrische Anomalie durch die Gleichungen

$$u = wA \cos \varphi,$$
$$v = wB \sin \varphi$$

ein und bezeichnen durch φ_i den dem Punkte (p_i, q_i, t_i) entsprechenden Werth von φ, so lauten die den Gleichungen (1) entsprechenden Gleichungen zwischen den neuen Bestimmungsstücken der fünf Punkte:

$$(2) \qquad A^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_{i+2} + B^2 \sin \varphi_i \sin \varphi_{i+2} + 1 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

* Rosanes und Pasch, Crelles Journal, Bd. 64, pag. 129.

Man kann diesen Gleichungen auch die von JACOBI* benützte Form geben, indem man an Stelle von φ_{i+2} die der Ellipse C_2 entsprechende excentrische Anomalie

$$\psi_{i+2} = \pi + \varphi_{i+2}$$

desjenigen Punktes von C_2 einführt, in welchem die der Ecke (p_i, q_i, t_i) des Fünfecks gegenüberliegende Seite den Kegelschnitt C_2 berührt; wir wollen aber der Einfachheit wegen die Form (2) beibehalten.

Verbindet man mit der Gleichung (2) die in demselben Systeme enthaltene Gleichung

$$A^2 \cos\varphi_{i+2} \cos\varphi_{i-1} + B^2 \sin\varphi_{i+2} \sin\varphi_{i-1} + 1 = 0,$$

so erhält man durch Elimination die von GAUSS** aufgestellten Relationen

$$-B^2 \sin\varphi_{i+2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_{i-1})},$$

$$-A^2 \cos\varphi_{i+2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_{i-1})},$$

woraus sich durch Division die von JACOBI bei der Behandlung des Schliessungsproblems*** angewandte Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}) = \frac{B^2}{A^2}\operatorname{tg}\varphi_{i+2}$$

ergiebt. Setzt man nunmehr†

$$k^2 = \frac{A^4 - B^4}{A^4 - 1} < 1,$$

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am} x,$$

$$\frac{1}{A^4} = \cos^2 \operatorname{am}\tau, \qquad \frac{B^4}{A^4} = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\tau,$$

$$\varphi_i = \operatorname{am} x_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

so nimmt die Gleichung (3) die Form an:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\operatorname{am} x_i + \operatorname{am} x_{i-1}) = \Delta \operatorname{am}\tau \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} x_{i+2},$$

---

* Werke, Bd. I, pag. 284.

** a. a. O., pag. 489, art. [7].

*** a. a. O., pag. 285.

† GAUSS, a. a. O. pag. 490.

und hieraus folgt, wie bei JACOBI, durch Vergleichung mit der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\operatorname{am} x + \operatorname{am} (x + 2\tau)) = \Delta \operatorname{am} \tau \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} (x + \tau),$$

die Darstellung

$$\varphi_{i-1} = \operatorname{am} (x_i + 2\tau), \quad \varphi_{i+2} = \operatorname{am} (x_i + \tau),$$

also abgesehen von Vielfachen von 2π,

$$\varphi_{2i+1} = \operatorname{am} (x_1 + i\tau) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Nehmen wir, um die Vorstellung zu fixieren, an, dass das betrachtete Fünfeck ein convexes sei, so hat man, wenn man die Ecken in der Reihenfolge

$$1, 3, 5, 2, 4, 1$$

durchläuft, die excentrische Anomalie φ_1 um 4π vermehrt, es ist also

$$\operatorname{am} (x_1 + 5\tau) = \operatorname{am} x_1 + 4\pi,$$

woraus sich

$$\tau = \frac{8K}{5}$$

ergiebt. Wir finden demnach bei dieser Annahme in Uebereinstimmung mit GAUSS

$$\varphi_i = \operatorname{am} \left(x_1 + (i - 1) \frac{4K}{5}\right).$$

Die von GAUSS aufgestellten Formeln ergeben sich nun durch einfache Rechnung.

Klausenburg, 1. Juni 1899.

3.

UEBER DIE TRANSFORMATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER VARIATIONSRECHNUNG.

Von Dr. JOSEF KÜRSCHAK,
corr. Mitgl. der ungarischen Academie der Wissenschaft, Professor am kön. ung. Josefs-Polytechnicum zu Budapest.

Vorgelegt der Academie in der Sitzung vom 15. Mai 1899.

Aus: „Mathematikai és Természettudományi Értesitö" (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Academie), Band XVII, pp. 457—466.

1. Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Frage, ob die Differentialgleichungen der Variationsrechnung durch die Berührungstransformationen wieder in Differentialgleichungen der Variationsrechnung überführt werden. Ich beweise wenigstens für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dass diese Frage zu bejahen ist. Eine Untersuchung der Differentialgleichungen höherer Ordnung würde zweifellos zu demselben Resultate führen, aber ein strenger analytischer Beweis scheint mir in diesem Falle umständlich zu sein.

2. Es mögen

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}$$
$$(k = 1, 2 \ldots, n)$$

und

$$p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots, n)$$

die Ableitungen erster resp. zweiter Ordnung der unbekannten Function z bedeuten; f sei eine lineare Verbindung von

$$| p_{ik} |$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots, n)$$

und deren Subdeterminanten mit Coefficienten, die bloss von

$$z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$$

abhängen.

Soll die erste Variation von

$$I = \int\int \ldots \int f dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verschwinden, so muss z der partiellen Differentialgleichung

$$V(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{dx_i dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = 0, \quad . \quad . \quad (2)$$

genügen, wo bei der mit $\frac{d}{dx_k}$ bezeichneten Differentiation zu berücksichtigen ist, dass auch z und deren Ableitungen x_k enthalten.

Die Differentialgleichung $V(f) = 0$ ist — wie wir sehen werden — von der zweiten Ordnung, und zwar hat ihre linke Seite dieselbe Beschaffenheit wie f, nämlich sie ist ebenfalls eine lineare Verbindung von

$$\underset{(i,\ k = 1,\ 2 \ldots n)}{| p_{ik} |}$$

und deren Subdeterminanten mit bloss von den unabhängigen Variablen, und von z und den ersten Ableitungen abhängigen Coefficienten. Wenigstens für 1, 2 und 3 unabhängige Veränderliche ist auch bekannt*, dass, wenn die Coefficienten von f beliebig sind, $V(f) = 0$ die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Variationsrechnung bedeutet.

Wenden wir nun auf $V(f) = 0$ die Berührungstransformation

$$\begin{aligned} z' &= Z(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n) \\ x_1' &= X_1,\ \ldots,\ x_n' = X_n,\ p_1' = P_1,\ \ldots,\ p_n' = P_n \end{aligned} \quad (3)$$

an, indem wir die Transformation in bekannter Weise mit den Gleichungen

$$\underset{(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)}{p_{ik}'} = P_{ik}(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ p_{11},\ \ldots,\ p_{nn}) \ . \quad (3^*)$$

erweitern**, und dann $V(f)$ in den neuen Veränderlichen ausdrücken.

---

* Arthur Hirsch. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, *Mathematische Annalen*, Bd. 49.

** Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Bd. II, pp. 378—383.

Aus I ergiebt sich ebenfalls ein *transformiertes* Integral, wenn man an Stelle von

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

das Product

$$\sigma^{-1} dx_1' dx_2' \ldots dx_n'$$

setzt, wo

$$\sigma = \left| \frac{dX_i}{dx_k} \right|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und dann $\bar{f} = f\sigma^{-1}$ (und die Grenzen des Integrals*) in den neuen Veränderlichen ausdrückt.

In dem transformierten Integrale

$$I = \int\int \ldots \int \bar{f} dx_1' dx_2' \ldots dx_n'$$

hat $\bar{f}$ wieder die Beschaffenheit von f.

Wird die Transformation als Einführung neuer Coordinaten betrachtet, so lässt sich vermuthen, dass die in Angriff genommene Frage mit folgendem Satze beantwortet werden kann:

Die dem ursprünglichem Integrale I entsprechende Differentialgleichung $V(f) = 0$ wird durch die Berührungstransformation in eine Differentialgleichung überführt, die sich nur durch einen unwesentlichen Factor von jener unterscheidet, die bei der Variation des transformierten Integrales zu lösen ist.

Wir brauchen also nur diesen Satz zu beweisen.

3. Vor allem entwickeln wir $V(f)$ ausführlich.

Die aus den zweiten Ableitungen p_{ik} gebildete Determinante und jede ihrer Subdeterminanten lässt sich als eine Functionaldeterminante

$$D_0 = \left| \frac{dU_\nu}{dx_\pi} \right| \qquad (\nu, \pi = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, in der die U_ν bloss von

$$z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$$

abhängen. Für

---

* Dazu ist allerdings nothwendig, dass für jede Stelle $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ der Begrenzung auch die Werthe von z und den ersten Ableitungen bekannt seien.

$$\left| p_{\nu\pi} \right|_{\substack{(\nu = i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r) \\ (\pi = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r)}}$$

ist

$$U_{i_1} = p_{k_1},\ U_{i_2} = p_{k_2},\ \ldots,\ U_{i_r} = p_{k_r},$$

und die übrigen U_ν sind je einem x gleich.

Bezeichnen wir in f den Coefficienten von D_0 mit U_0, *so ist f eine Summe von Gliedern von der Form $U_0 D_0$, wo D_0 die dem Elemente U_0 adjungierte Subdeterminante von*

$$\left| U_\nu \frac{d U_\nu}{d x_1} \frac{d U_\nu}{d x_2} \cdots \frac{d U_\nu}{d x_n} \right|_{(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

bedeutet; und $V(f)$ ist die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$.

Bei der Berechnung von $V(U_0 D_0)$ hat man

$$\frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{d U_\nu}{d x_k} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad \ldots\ (5)$$

wo $D_{0\nu}^{(k)}$ die zu $\frac{d U_\nu}{d x_k}$ adjungierte Subdeterminante von D_0 bezeichnet. Hier kann man die Reihenfolge von $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{d}{d x_k}$ vertauschen, also ist:

$$U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{d U_\nu}{d x_k} = \frac{d}{d x_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \right) - U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{d D_{0\nu}^{(k)}}{d x_k} - D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{d U_0}{d x_k}.$$

Ferner hat man nach einem bekannten Satze über Functionaldeterminanten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d D_{0\nu}^{(k)}}{d x_k} = 0.$$

Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{d U_\nu}{d x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{d x_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

wo

$$D_\nu = - \sum_{k=1}^{n} D_{0\nu}^{(k)} \frac{d U_0}{d x_k}$$

die zu U_ν adjungierte Subdeterminante von (4.) bedeutet.

Wird dies in der Formel (5.) in Betracht gezogen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z}. \tag{6}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_i} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial p_k}. \tag{7}$$

Hier kann die Reihenfolge von $\frac{\partial}{\partial p_k}$ und $\frac{d}{dx_i}$ nicht vertauscht werden, sondern es ist

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U_\nu}{\partial z} + p_{i_1}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_1} + \cdots + p_{in}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_n}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik}\frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

wo δ_{ik} nur dann verschwindet, wenn $i \gtrless k$, hingegen für $i = k$ wird $\delta_{ik} = 1$. Also ist

$$U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_i} = U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} =$$

$$= \frac{d}{dx_i}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right) - D_{0\nu}^{(i)} \frac{dU_0}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} -$$

$$- U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dD_{0\nu}^{(i)}}{dx_i} + \delta_{ik} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

folglich

$$\sum_{i=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}.$$

Dies ergiebt in (7.) eingesetzt:

$$\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}. \tag{8}$$

Endlich ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\delta_{ik})\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}},$$

und da

$$(1+\delta_{ik})\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \sum_{\nu=0}^{n}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_i}\right),$$

so hat man

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right). \qquad (9)$$

Aus den Formeln (6.), (8.) und (9.) erhalten wir:

$$V(U_0 D_0) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)\right). \qquad (10)$$

Hieraus ist bereits ersichtlich, dass in $V(U_0 D_0)$ höchstens die Ableitungen bis zur dritten Ordnung auftreten.

Dass auch die Ableitungen dritter Ordnung fehlen, ergiebt sich durch folgende Rechnung.

Es bezeichne $D_{\nu\pi}^{(i)}$ die zu $\frac{dU_\pi}{dx_i}$ adjungierte Subdeterminante von D_ν. Dann ist

$$\delta_{ik}D_\nu = \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{dU_\pi}{dx_k} \qquad \frac{dD_\nu}{dx_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d^2U_\pi}{dx_i dx_k},$$

wo $^{(\nu)}$ andeutet, dass π nur von ν verschiedene Werthe annimmt. Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir:

$$\frac{d}{dx_k}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dD_\nu}{dx_k} + \sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}D_\nu\frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{d^2U_\pi}{dx_i dx_k} + \frac{dU_\pi}{dx_k}\frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}\right).$$

und

$$\frac{d}{dx_k}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}\right),$$

wo bereits in Betracht gezogen ist, dass

$$D_{\nu\pi}^{(i)} = -D_{\pi\nu}^{(i)}.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)} \frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi], \quad (11)$$

wo $[U_\nu,\ U_\pi]$ den Poisson'schen Klammerausdruck

$$[U_\nu,\ U_\pi] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\pi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial U_\pi}{\partial z}\right) - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right)\right)$$

bedeutet.

Die definitive Form von $V(U_0 D_0)$ ist also:

$$V(U_0 D_0) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \tfrac{1}{2}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\sum_{i=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi]\right). \quad (12)$$

Hier unterscheidet sich D_ν höchstens dem Vorzeichen nach von der aus den Matricen

$$\left\| \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial U_\lambda}{\partial z}\cdots\frac{\partial U_\lambda}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial U_\lambda}{\partial z}\frac{\partial U_\lambda}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial U_\lambda}{\partial p_n}\right\|$$

$$(\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1,\ \ldots,\ n)$$

$$\left\| \frac{dx_\mu}{dx_1}\cdots\frac{dx_\mu}{dx_n}\, p_{\mu 1}\cdots p_{\mu n}\right\|$$

$$(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

componierten Determinante. Nach dem Determinanten-Satze von Binet und Cauchy hat also D_ν die Beschaffenheit wie f. Aehnliches gilt auch von

$$\sum_{i=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi],$$

indem dieser Ausdruck aus D_ν sich dadurch bilden lässt, dass statt U_π

$$[U_\nu,\ U_\pi]$$

gesetzt wird.

Auf diese Weise hat jedes $V(U_0 D_0)$, also auch $V(f)$, die Beschaffenheit wie f.

4. Untersuchen wir nun die Wirkung der Berührungstransformation (3.) auf $V(U_0 D_0)$.

Gemäss der Definition der Berührungstransformationen ist

$$dZ - \sum_{k=1}^{n} P_k dX_k = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{n} p d_k x_k \right), \quad . \quad . \quad (13)$$

wo der Factor ϱ bloss von

$$z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$$

abhängt. Derselbe Factor spielt auch bei der Transformation des POISSON'schen Klammerausdruckes eine Rolle. Es ist nämlich*

$$[\varphi,\ \psi] = \varrho\,[\varphi,\ \psi]' \quad [\varphi,\ \psi] - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\varrho\varphi,\ \psi]' - \varrho\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z'},$$

wo $[\varphi,\ \psi]'$ den bezüglich der neuen Variablen gebildeten Klammerausdruck bedeutet.

Z. B. für $\varphi = 1$ und $\psi = U_\nu$ hat man

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu,\ \varrho]'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Das Verhalten von D_ν giebt die Formel

$$D_\nu = \sigma D'_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

an, wo

$$\sigma = \left| \frac{dx_i}{dx_k} \right|, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

und D'_ν die zu U_ν adjungierte Subdeterminante von

$$\left| U_\nu \frac{dU_\nu}{dx'_1} \frac{dU_\nu}{dx'_2} \cdots \frac{dU_\nu}{dx'_n} \right| \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

bedeutet.

---

* LIE, l. c., pp. 123 und 276.

Aus (14) und (15) folgt:

$$D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \sigma D'_\nu \left(\varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu, \varrho]' \right) . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wenn wir noch die zu $\frac{d U_\pi}{d x'_i}$ adjungierte Subdeterminante von D'_ν mit $D'^{(i)}_{\nu\pi}$ bezeichnen, so ergiebt sich

$$\sum_{i=1}^{n} D^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{d x_i} = \sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{d x'_i} = \sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d \varrho [U_\nu, U_\pi]'}{d x'_i},$$

das heisst

$$\sum_{i=1}^{n} D^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{d x_i} =$$

$$= \varrho \sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]'}{d x'_i} + \sigma [U_\nu, U_\pi]' \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d \varrho}{d x'_i} . \quad (17)$$

Folglich ist $V(U_0 D_0)$ in den neuen Veränderlichen ausgedrückt gleich der Summe von

$$\varrho \sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{d z'} - \tfrac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]'}{d x'_i} \right) \quad (18)$$

und

$$\sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu [U_\nu, \varrho]' - \tfrac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu U_\pi]' \frac{d \varrho}{d x'_i} \right) . \quad (19)$$

Der zweite Theil verschwindet. Es ist nämlich

$$\tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu, U_\pi]' = \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{d U_\pi}{d x'_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p'_k} \frac{d U_\nu}{d x_k} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{d U_\pi}{d x'_k} + \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\pi\nu} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\pi}{\partial p'_k} \frac{d U_\nu}{d x'_k},$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu, U_\pi]' = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{d U_\pi}{d x'_k} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} D'_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_i} .$$

Anderseits ist

$$0 = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \frac{d\,U_\nu}{d\,x'_i}.$$

Folglich ist

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu,\ U_\pi]' \frac{d\varrho}{d\,x'_i} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p'_i} \frac{d\varrho}{d\,x'_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial p'_i} \frac{d\,U_\nu}{d\,x_i} \right) = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu [U_\nu,\ \varrho]',$$

und die Summe (19.) verschwindet wirklich.

Wir haben also

$$V(U_0 D_0) = \varrho\sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} - \tfrac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu,\ U_\pi]'}{d\,x'_i} \right). \quad (20)$$

Diese Formel besagt aber eben, $V(U_0 D_0)$ sei gleich dem Producte von $\varrho\sigma$ und der linken Seite jener Differentialgleichung, die bei der Variation von

$$\int\int \ldots \int U_0 D'_0 dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n$$

— also der transformierten Form von

$$\int\int \ldots \int U_0 D_0 dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

— zu lösen ist.

Da nun $V(f)$ die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$ ist, so gilt der in Artikel 2 behauptete Satz allgemein; und zwar ist der dort erwähnte Factor gleich: $\varrho\sigma$.

4.

BEITRÄGE ZUR KENNTNISS DER KEHLKOPF-NERVEN.

Von Dr. A. ÓNODI, Prof. an d. Univ. Budapest.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 12. December 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitő“ (Math. und Naturw. Anzeiger) Bd. XVII, pp. 79—111.

In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts vertraten fast alle Anatomen dieselbe Ansicht in Betreff der Innervation des Kehlkopfes, sie betrachteten sowohl den oberen wie den unteren Kehlkopfnerven für gemischte Nerven und liessen von beiden Kehlkopfnerven die Schleimhaut und die Muskeln des Kehlkopfes innervieren, somit eine doppelte Innervation der Schleimhaut und der Muskeln des Kehlkopfes. Diese Lehre sehen wir wesentlich verändert in den von dem Jahre 1850 bis heute erschienenen anatomischen Lehrbüchern. Wenn wir die Endausbreitungen der Kehlkopfnerven näher betrachten, so können wir die verschiedenen Ansichten in folgende Gruppen zusammenfassen.

1. Der äussere und der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven. Diese Ansicht ist bei GEGENBAUR[1] vertreten. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versieht den Musc. cricothyreoideus und durch diesen Muskel „sollen feine Zweige auch zur Schleimhaut gelangen“. Der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ver-

[1] GEGENBAUR, Lehrbuch der Anatomie. 1890.

sieht die Schleimhaut des Kehlkopfes bis zur Stimmritze, ferner lesen wir „auch an den inneren Kehlkopfmuskeln sind untergeordnete Zweige beschrieben“. Der untere Kehlkopfnerv versieht ausser dem Musc. cricothyreoideus die anderen Kehlkopfmuskeln, ferner „auch zur Schleimhaut des unteren Kehlkopfraumes verbreiten sich Zweige“.

2. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein sensibler Nerv. Diese Ansicht vertritt SCHWALBE[1]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt den Musc. cricothyreoideus, „der Nerv ist also vorzugsweise motorischer Natur, giebt aber ausserdem noch einige feine Zweige zur Schleimhaut des Stimmbandes“. Der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt die Kehlkopfschleimhaut bis zur Stimmritze, „ist ein sensibler Nerv“. Der untere Kehlkopfnerv innerviert ausser dem Musc. cricothyroideus die anderen Kehlkopfmuskeln, ferner „auch dringen einige Fäden abwärts zu dem unterhalb der Stimmritze gelegenen Theile der Kehlkopfschleimhaut vor“.

3. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist motorisch, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven. Ein alter Vertreter dieser Ansicht ist ARNOLD[2]. LUSCHKA[3] spricht sich auch in seinem älteren Buche in diesem Sinne aus. Nach ihm führt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven Fasern zu den Mm. arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus. RÜDINGER[4] lässt den Musc. cricothyreoideus vom äusseren Aste des oberen Kehlkopfnerven, die Mm. arytaenoideus transversus und aryepiglotticus von dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven versehen; der untere Kehlkopfnerv giebt Muskelzweige, ferner „auch sensible Fäden bringt der untere Kehlkopfnerv zur Schleimhaut“. Nach AEBY[5] versorgt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut und den Musc. epiglotticus: der untere Kehlkopfnerv

[1] SCHWALBE, Anatomie. 1881.
[2] ARNOLD, Anatomie. 1851.
[3] LUSCHKA, Die Anatomie des menschlichen Halses. 1862.
[4] RÜDINGER, Anatomie der Gehirnnerven. 1870.
[5] AEBY, Anatomie. 1871.

giebt Zweige zu den Muskeln und zur Schleimhaut. Nach QUAIN-HOFFMANN[1] versorgt der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut bis zu den Stimmbändern, ferner den Musc. arytaenoideus obliquus; der untere Kehlkopfnerv innerviert die übrigen Kehlkopfmuskeln und mit einigen Fäden die Kehlkopfschleimhaut. Nach HOLLSTEIN[2] giebt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ausser seinen sensiblen Fasern Zweige zu den Mm. arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus; der untere Kehlkopfnerv versorgt die übrigen Kehlkopfmuskeln und die Schleimhaut unterhalb der Stimmritze. Nach LANGER[3] ist der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ein gemischter Nerv, er versorgt die Schleimhaut bis zur Stimmritze, dass er auch motorische Fasern führt, das erfahren wir aus der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven, „auch er enthält motorische und sensible Fasern, die ersteren giebt er theils allein, theils im Verein mit dem Ramus communicans vom oberen Laryngeus an die Muskeln ab, welche direct die Stimmritze beherrschen". Die sensiblen Fasern des unteren Kehlkopfnerven versehen die Schleimhaut in und unter der Stimmritze. Dieselbe Beschreibung finden wir später in dem Lehrbuch von LANGER-TOLDT[4]. In der neuesten Ausgabe dieses Lehrbuches äussert sich TOLDT[5] in einer ganz abweichenden Weise. Er sagt auch hier, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ein gemischter Nerv, aber wir finden nicht mehr die vorige Erklärung seines gemischten Charakters, denn TOLDT macht von den motorischen Fasern des Ramus communicans N. lar. sup. gar keine Erwähnung. Von den unteren Kehlkopfnerven spricht er folgendermaassen: „auch er enthält motorische und sensible Fasern", „überdies versorgt er die Schleimhaut in und unter der Stimmritze, und zwar wahrscheinlich mittelst jener Fasern, welche ihm durch den Ramus anastomoticus des Nervus laryng. sup. zugeführt werden".

[1] QUAIN-HOFFMANN, Anatomie. 1872.
[2] HOLLSTEIN, Anatomie. 1873.
[3] LANGER, Anatomie. 1885.
[4] LANGER-TOLDT, Anatomie. 1893.
[5] l. c. 1897.

HYRTL[1] lässt die Mm. thyreo- et aryepiglotticus vom inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven innervieren; der untere Kehlkopfnerv giebt Muskelzweige, ferner verbinden sich die feinsten Ramificationen in der Schleimhaut mit jenen der oberen Kehlkopfnerven.

4. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind motorische Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein sensibler Nerv. Ein alter Vertreter dieser Ansicht ist MEYER[2]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt den Musculus cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut und der untere Kehlkopfnerv innerviert die übrigen Kehlkopfmuskeln. Dieselbe Ansicht vertraten später HARTMANN[3] und PANSCH[4], in letzterer Zeit RAUBER[5], VAN GEHUCHTEN[6], ZUCKERKANDL[7], GRAY[8] und QUAIN-SCHÄFFER-THANE[9].

5. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind motorische Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein gemischter Nerv. Diese Ansicht vertrat HIRSCHFELD[10]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven innerviert den Musculus cricothyroideus, die übrigen Kehlkopfmuskeln der untere Kehlkopfnerv; der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt ausser der Schleimhaut den Musculus arytaenoideus transversus.

6. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein gemischter Nerv, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist sensibel, der untere Kehlkopfnerv ist ein motorischer Nerv. Diese Ansicht hat sich allgemein verbreitet unter den französischen Ana-

---

[1] HYRTL, Anatomie. 1893.
[2] MEYER, Anatomie. 1861.
[3] HARTMANN, Anatomie. 1881.
[4] PANSCH, Anatomie. 1881.
[5] RAUBER, Anatomie des Menschen. 1893.
[6] VAN GEHUCHTEN, Anatomie du système nerveux. 1893.
[7] ZUCKERKANDL, Heymann's Handbuch der Laryng. 1896.
[8] GRAY, Anatomy. 1890.
[9] QUAIN-SCHÄFFER-THANE. 1895.
[10] HIRSCHFELD, Système nerveux. 1867.

tomen, einige deutsche Anatomen schliessen sich gleichfalls dieser an. LUSCHKA[1] hat in seinem neueren Werke in zwei Fragen seine Ansicht wesentlich geändert. Er nahm an, dass der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musculus cricothyreoideus innerviert und einige Fasern durch diesen Muskel zur Schleimhaut des Stimmbandes geben; ferner, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven nur die Kehlkopfschleimhaut und der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln versorgt. Diese Ansicht vertritt HENLE[2] in seinem älteren und neueren Lehrbuche, sowie auch KRAUSE[3]. Die Mehrzahl der französischen Anatomen äussert sich in demselben Sinne und zwar BEAUNIS et BOUCHARD[4], SAPPEY[5], DEBIERRE[6], TESTUT[7], FORT[8].

7. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist motorisch, der innere Ast desselben sensibel, der untere Kehlkopfnerv ist ein gemischter Nerv.

Nach VOLL[9] innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Schleimhaut bis zu den Stimmbändern; der untere Kehlkopfnerv versorgt die übrigen Kehlkopfmuskeln, und die Kehlkopfschleimhaut unter den Stimmbändern. Bei BRÖSIKE[10] finden wir eine Abweichung in der Innervation der Kehlkopfschleimhaut, nämlich der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt die ganze Kehlkopfschleimhaut, und nur einige Fäden gehen zur Schleimhaut unter der Stimmritze. Nach dem neuesten Beobachter BABES[11] ist der untere Kehlkopfnerv ein gemischter Nerv, seine sensiblen Fasern gehen durch die Vermittelung der

---

[1] LUSCHKA, Der Kehlkopf des Menschen. 1871.

[2] HENLE, Anatomie, Nervenlehre. 1871, 1879.

[3] KRAUSE, Anatomie. 1879.

[4] BEAUNIS et BOUCHARD, Anatomie. 1877.

[5] SAPPEY, Traité d'Anat. 1889.

[6] DEBIERRE, Traité d'Anat. 1891.

[7] TESTUT, Traité d'Anat. 1891.

[8] FORT, Anat. descript. 1892.

[9] VOLL, Compendium der Anatomie. 1893.

[10] BRÖSIKE, Lehrbuch der Anatomie. 1895.

[11] A. BABES, Contributiuni la studial Innervatiunei Laryngol. Bucarest 1897.

GALEN'schen Schleife und die von ihm beschriebenen Verbindungen in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven, um mit dessen Zweigen zur Kehlkopfschleimhaut zu gelangen. Nach unseren älteren[1] und neueren Untersuchungen halten wir unter den aufgezählten Meinungen die letzte für die richtige.

Nach unseren Untersuchungen innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln; an der Innervierung der Kehlkopfschleimhaut nimmt sowohl der obere wie der untere Kehlkopfnerv theil, immerhin in grösserer Stärke der obere, und ausserdem treten die sensiblen Fasern über die Mittellinie, daher auch eine gekreuzte, doppelte sensible Innervation besteht.

Was die Innervation der Kehlkopfmuskeln betrifft, so finden wir in neuerer Zeit fast die gleiche Ansicht, welche auch nach unseren Untersuchungen der Wirklichkeit entspricht. Es innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln und zwar die Mm. cricoarytaenoideus posticus et lateralis, arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus, thyreoarytaenoideus.

Was die Innervation der Kehlkopfschleimhaut betrifft, so können wir die verschiedenen Ansichten in folgende vier Gruppen theilen:

1. Die Kehlkopfschleimhaut versorgen die beiden Aeste des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv (SCHWALBE[2], GEGENBAUR[3].

2. Die Kehlkopfschleimhaut innerviert der äussere und der innere Ast des obereren Kehlkopfnerven (LUSCHKA[4], HENLE[5], BEAUNIS et BOUCHARD[6], KRAUSE[7], SAPPEY[8], DEBIERRE[9], TESTUT[10], FORT[11].

3. Die Kehlkopfschleimhaut versorgt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv (ARNOLD[12],

---

[1] ÓNODI, Innervation des Kehlkopfes. Wien 1895.

[2] l. c. 1881. — [3] l. c. 1890. — [4] l. c. 1871. — [5] l. c. 1871—1879. — [6] l. c. 1877. — [7] l. c. 1879. — [8] l. c. 1889. — [9] l. c. 1890. — [10] l. c. 1891. — [11] l. c. 1892. — [12] l. c. 1851.

RÜDINGER[1], AEBY[2], QUAIN-HOFFMANN[3], HOLLSTEIN[4], LANGER[5], LANGER-TOLDT[6], HYRTL[7], VOLL[8], BRÖSIKE[9], ONODI[10], BABES[11]).

4. Die Kehlkopfschleimhaut wird vom inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven versehen (MEYER[12], HIRSCHFELD[13], HARTMANN[14], PANSCH[15], RAUBER[16], VAN GEHUCHTEN[17], GRAY[18], QUAIN-SCHÄFFER-THANE[19], ZUCKERKANDL[20]).

Wir haben gesehen die verschiedenen Ansichten in Betreff des Ursprunges und der Verbreitung der Schleimhautnerven. Den verschiedenen Ursprung zeigen die eben erwähnten vier Gruppen, aber gleichfalls verschieden sind die Ansichten das Innervationsgebiet betreffend. Einzelne haben in der Stimmritze die scharfe Grenzlinie gezogen zwischen der Ausbreitung des oberen und unteren Kehlkopfnerven. Andere haben eine doppelte Innervation in der Schleimhaut unter der Stimmritze angenommen; einzelne wieder haben das ganze sensible Innervationsgebiet dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven zugesprochen. In den erwähnten Büchern finden wir nur zwei, welche eine Erwähnung enthalten über die Kreuzung der Nerven und über die Verbindungen der Fasern des oberen und unteren Kehlkopfnerven.

GEGENBAUR sagt, bei der Beschreibung des Ramus internus N. lar. sup. „sind untergeordnete Zweige beschrieben, sowie Uebertritte von Nerven von der einen nach der anderen Seite". Bei HYRTL finden wir: „Die feineren und die feinsten Ramificationen des Laryngeus superior in der Kehlkopfschleimhaut gehen mehrfache Verbindungen mit jenen des Laryngeus inferior ein". Wie wir sehen, erwähnt GEGENBAUR die Kreuzung, HYRTL die Verbindungen in der Schleimhaut. Hier erwähne ich MANDELSTAMM's[21] Arbeit, welche sich zwar nicht auf den Menschen bezieht. Er hat beim Meerschweinchen gefunden, dass in der Schleimhaut der hinteren Kehlkopfwand einzelne Faserbündel die

---

[1] l. c. 1870. — [2] l. c. 1871. — [3] l. c. 1872. — [4] l. c. 1873. — [5] l. c. 1885. — [6] l. c. 1873—1879. — [7] l. c. 1893. — [8] l. c. 1893. — [9] l. c. 1895. — [10] l. c. 1895. — [11] l. c. 1897. — [12] l. c. — [13] l. c. — [14] l. c. — [15] l. c. — [16] l. c. — [17] l. c. — [18] l. c. — [19] l. c. — [20] l. c.

[21] Studien über Innervation und Atrophie der Kehlkopfmuskeln. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1882. 85. Bd. III. Abth.

Medianlinie überschreiten. Dieser Befund hat WEINZWEIG[1] bewogen, diese Verhältnisse beim Menschen und beim Rind zu untersuchen. Bei seinen Untersuchungen hatte er die Kehlkopfschleimhaut mit Kalilauge behandelt. WEINZWEIG hat beim Menschen unter dem Mikroskop gefunden, dass die Nervenbündel sich in der Medianlinie kreuzen und dass die Kehlkopfschleimhaut vom oberen und unteren Kehlkopfnerven versorgt wird. Beim Rind fand er ein präparierbares Medianbündel, welches sich aus

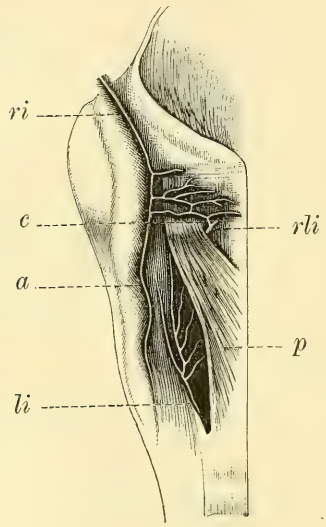


Fig. 1.

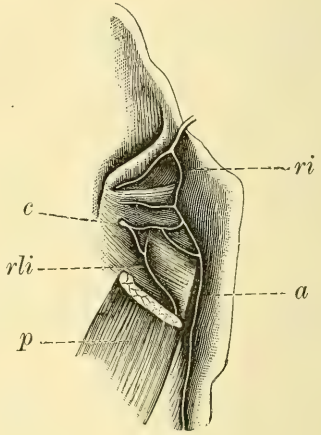


Fig. 2.

ri Ramus internus n. lar. sup. *c* Verbindung. *a* Ram. descendens n. lar. sup. *li* Laryngeus inferior. *rli* Zweig des Laryngeus inf. *p* Musc. cricoarytaenoideus posticus.

zwei Zweigen der unteren Kehlkopfnerven zusammensetzt und am unteren Rande des Aryknorpels verzweigt. Unsere Untersuchungen haben beim Menschen gezeigt, dass im Gebiete des Musc. arytaenoideus transversus mehrfache Verbindungen existieren zwischen dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven und dem für den Musculus arytaenoideus bestimmten Zweige des unteren Kehlkopf-

[1] Zur Anatomie der Kehlkopfnerven. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1883. 86. Bd. III. Abth.

nerven. Wegen der Wichtigkeit dieser Verbindungen für die späteren Auseinandersetzungen und experimentellen Forschungen füge ich die Illustrationen bei. Am oberen Rande der Ringplatte, wo der Recurrenszweig sichtbar wird, um sich dann in den Musc. arytaenoideus transversus einzusenken, an dieser Stelle finden wir einen Theil der Verbindungen ganz oberflächlich. Diese Verbindung wird durch einen langen, den Muskel überbrückenden Ast hergestellt (Fig. 1 und 3). Manchmal treffen wir Verbindungszweige, die sich zu einem Stamme gesellen (Fig. 2). Einmal habe

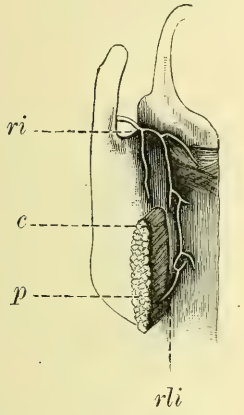


Fig. 3.

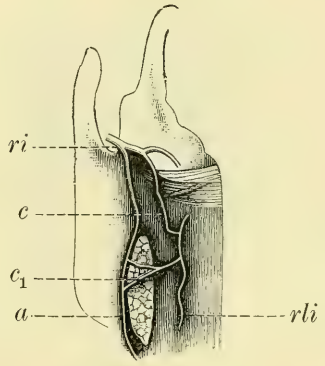


Fig. 4.

ri Ramus internus n. lar. sup. *c* Verbindung. *p* Musculus cricoarytaenoideus posticus. *rli* Zweig des Laryngeus inferior. c_1 Verbindung. *a* Ramus descendens n. lar. sup.

ich beobachtet, dass der genannte Recurrenszweig mit zwei gesonderten Fäden mit dem Laryngeus superior eine oberflächliche Verbindung einging, und zwar ein Zweig mit dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven, ein anderer mit der Ansa Galeni. Ausser diesen oberflächlichen Verbindungen habe ich in der Tiefe des Musc. arytaenoideus transversus ebenfalls Verbindungen angetroffen; ein längs des Muskels laufender Nervenast verbindet den oberen mit dem unteren Kehlkopfnerven (Fig. 5). Aus dieser tiefen Schlinge gehen Zweige zum Muskel und zur Schleimhaut. Ausserdem finden wir tiefer, unmittelbar an der Schleimhaut zur Medianlinie convergierend und diese überschreitend, sich kreuzende

Zweige des oberen Kehlkopfnerven, welche mit dem Recurrens in Verbindung stehen (Fig. 6 und 7). Was die Verbindungen zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven betrifft, so hat BABES in letzter Zeit beim Menschen auch mehrfache Verbindungen beschrieben, die er zumeist mittelst Anwendung von Kalilauge beobachtet hat. Aus seinen brieflichen Mittheilungen, die sich auf seine in rumänischer Sprache erschienenen Werke beziehen, entnehmen wir Folgendes: „Was die Anastomosen der beiden Laryngei anlangt, so habe ich verschiedene, aber nicht constante Verbindungen gefunden. So ist eine Verbindung unter der Mucosa, welche die hintere Wand des Kehlkopfes bekleidet, diese ist aus

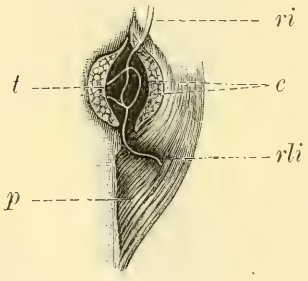


Fig. 5.

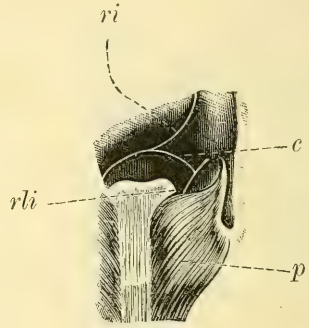


Fig. 6.

ri Ramus int. n. lar. sup. *c* Verbindung. *t* Musculus arytaenoideus transversus. *rli* Zweig des Laryngeus inferior. *p* Musculus cricoarytaenoideus posticus.

Fasern gebildet, welche von der Ansa Galeni ausgehen. Andere Verbindungen befinden sich auf der Oberfläche und in der Tiefe des Arytaenoid, zwischen den Nerven derselben als auch der entgegengesetzten Seite. Andere Verbindungen befinden sich zwischen dem Recurrens und dem Laryngeus externus. Verbindungen der beiden Laryngei befinden sich auch auf der Aussenseite nahe der Furche, welche den Crico-arytaen. lat. vom Thyreo-arytaen. trennt. Diese Verbindung bildet der Endast des Recurrens, welcher zum Thyreo-aryt. führt, mit einem Aste aus dem Bündel der horizontalen Aeste (Laryng. sup.). An derselben Stelle begegnet man häufig einem Aste vom Laryngeus ext. durch den Musc. cricothyr. unter dem unteren Rande der Cartil. thyreoid.,

wo sie sich vereinigen (Recurrens mit Laryng. sup. und Laryng. ext.). Einer anderen Verbindung zwischen dem Laryng. sup. und Laryng. ext. begegnete ich auch." (Ein Ast des Ram. ext. n. lar. sup. mit einem Aste der Ansa Galeni.)

Bei den späteren Besprechungen werden wir noch auf die von uns und von BABES beschriebenen Verbindungen zurückkommen. Jetzt wollen wir jene Verbindung näher betrachten, welche schon längst als Ansa Galeni bekannt ist. Nur in wenigen Lehrbüchern finden wir eine Erwähnung über die Faserbündel und deren Ursprung in der Ansa Galeni. Die meisten beschreiben einfach diese Verbindung mit den folgenden verschiedenen Bezeichnungen: als Ansa Galeni, Ramus descendens, Ramus anastomoticus, Ramus communicans; in den französischen Lehrbüchern wird zumeist die Ansa Galeni so beschrieben, dass dieselbe von einem absteigenden Aste des oberen Kehlkopfnerven und von einem aufsteigenden Aste des unteren Kehlkopfnerven gebildet wird.

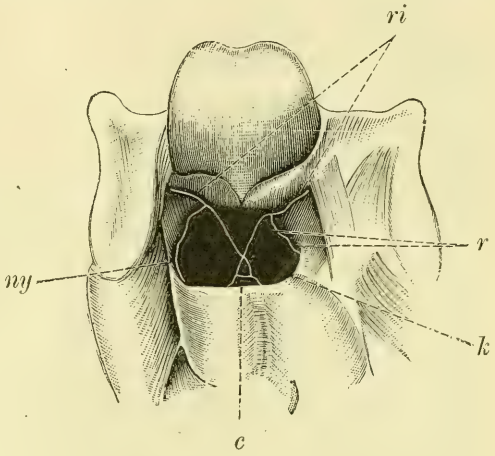


Fig. 7.

ri Ramus internus n. lar. sup. *ny* Schleimhaut. *r* Schleimhautäste des Ram. int. n. lar. sup. *k* Kreuzung. *c* Verbindung.

PHILIPPEAUX und VULPIAN[1] haben beim Hunde auf experimentellem Wege mittelst der WALLER'schen Methode gefunden, dass die Verbindung zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven Fasern vom oberen Kehlkopfnerven führt, welche im Stamme des unteren Kehlkopfnerven sich in zwei Bündel theilen, von denen das dünnere im Stamme verbleibt, das grössere von demselben sich trennt und zur Schleimhaut der Luftröhre geht.

[1] Archives de physiologie. 1869.

Rüdinger lässt schon in diesem Sinne die Fasern der Ansa Galeni zur Trachea gelangen, ebenso Henle, Fort. Nach Luschka[1] „geht der Ramus communicans nur scheinbar in den Laryngeus inferior über". Schwalbe schreibt: „Es gelangen dadurch Fasern des sensiblen Ramus internus in die Bahn des Nervus laryngeus inferior, nicht umgekehrt." Rauber sagt: „Der Ramus communicans führt sensible Fasern in den unteren Kehlkopfnerven über." In den Lehrbüchern von Langer und Langer-Toldt haben wir gefunden, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven als gemischter Nerv beschrieben ist und dass die Ansa Galeni motorische Fasern führt, wir lesen nämlich bei der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven: „Auch er enthält motorische und sensible Fasern, die ersteren giebt er theils allein, theils im Verein mit dem Ramus communicans vom oberen Laryngeus an die Muskeln ab, welche direct die Stimmritze beherrschen." In diesem Sinne äussert auch sich Henle-Merkel[2]: „Der anastomotische Ast beider Nn. laryngei enthält lediglich aufwärts laufende Fasern."

Was die Ansa Galeni betrifft, so ist Toldt in seinem späteren Buche einer anderen Meinung, er erwähnt nicht mehr seine motorischen Fasern, sondern äussert sich bei der Beschreibung der unteren Kehlkopfnerven wie folgt: „Ueberdies versorgt er die Schleimhaut in und unter der Stimmritze, und zwar wahrscheinlich mittelst jener Fasern, welche ihm durch den Ramus anastomoticus des Nerv. laryng. sup. zugeführt werden."

Zuckerkandl spricht sich über die Ansa Galeni folgendermaassen aus: „Wobei es sich höchst wahrscheinlich um sensible Fasern handeln dürfte, welche die Bahn des Laryng. inf. benutzen, um an die tieferen Antheile des Kehlkopfes und an das obere Stück der Trachea zu gelangen." Babes[3] schreibt über die Ansa Galeni, „dass sie sowohl aus Aesten aus dem Nerv. laryng. sup., welche absteigend sind, als auch aus aufsteigenden Aesten aus dem Recurrens sich zusammensetzte. Wohin sich die Aeste begeben und auf welchem Wege, konnte ich nicht nachweisen".

[1] l. c. 1871.

[2] Henle-Merkel, Anatomie. 1888.

[3] l. c. 1897.

Er vermuthet, dass die Fasern des unteren Kehlkopfnerven durch die Ansa Galeni in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven gelangen und mit seinen Aesten zum Kehlkopf gehen, während die Fasern des oberen Kehlkopfnerven umgekehrt in die Bahn des unteren Kehlkopfnerven treten, um mit seinen Aesten zum Kehlkopf, Luftröhre und Oesophagus zu gelangen.

Wie wir gesehen haben, sind die Ansichten verschieden: a) die Ansa Galeni führt motorische Fasern, b) sie bringt sensible Fasern zu den unteren Kehlkopfnerven, c) sie führt sensible Fasern zur Luftröhre und d) zum Kehlkopf, e) sie vermittelt die sensiblen Fasern des oberen und des unteren Kehlkopfnerven für den Kehlkopf und für die Luftröhre.

Wir können auf Grund unserer Untersuchungen behaupten, dass die Ansa Galeni hauptsächlich von Fasern des inneren Astes des oberen Kehlkopfnerven zusammengesetzt ist, welche beim Menschen für den oberen Theil der Luftröhre bestimmt sind, ferner vermittelt sie den Eintritt der Recurrensfasern in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven. Offen bleibt aber die Frage des Verlaufes dieser Recurrensfasern im Gebiete des oberen Kehlkopfnerven. Im Folgenden werden wir die Frage der Ansa Galeni beim Hunde, dem wichtigsten Versuchsthiere, ausführlich besprechen.

Kandarazky[1] war der erste, der diese Frage beim Hunde einer gründlichen Untersuchung unterworfen hat. Er fand, dass die Ansa Galeni bis zum vierten Trachealring mit dem Recurrens in einer Scheide geschlossen ist, dann von ihm sich trennt und als selbständiger Nerv, Ramus trachealis n. lar. sup., der Luftröhre zahlreiche Aeste gebend in den Vagusstamm unterhalb des Recurrensursprunges übergeht. Dieser Nerv bildet die directe Fortsetzung des oberen Kehlkopfnerven. Aus seiner Beschreibung heben wir Folgendes hervor: „In dem Trachealzweig finden sich auf- und absteigende Fasern"; „die ganze obere Hälfte der Trachea etwa im Bereich von 20 Knorpeln, die vier oberen, wo der Trachealzweig in einer Scheide mit dem Recurrens liegt, nicht ausgenommen, wird vom Trachealzweig aus und von N. recurrens

[1] Kandarazky, Archiv f. Anat. u. Physiol. 1881.

innerviert.“ „Als Variation des Trachealzweiges ist anzugeben, dass er zuweilen sich nicht vom N. recurrens abzweigt, sondern mit ihm verläuft, so dass es scheinen kann, als ob die Trachea vom N. recurrens ihre Zweige erhalten würde.“ „Weiter trifft man einen Verbindungszweig zwischen dem N. recurrens und dem Trachealzweig an und endlich tritt der Trachealzweig selbst nach Abgabe der Zweige für die obere Hälfte der Trachea (vom 1. bis 20. Knorpel) an den Recurrens.“ In einem früheren Aufsatze[1] habe ich den Ramus trachealis u. lar. sup. im Sinne KANDARAZKY's kurz berührt und eine Zeichnung beigegeben. In einer neueren Arbeit[2] habe ich diese Frage wieder berührt: „Beim Hund verläuft parallel und lose verbunden mit dem Stamme des Recurrens der R. trachealis u. lar. sup. zahlreiche feine Aeste zur Trachea sendend. Eigentlich bildet er die Fortsetzung der Ansa Galeni, welche beim Menschen mit dem lateralen Zweig im Zusammenhang steht und in die Bahn des Recurrens sensible Fasern vom Laryngeus sup. bringt. Beim Hund hängt er mit dem Stamme des Recurrens zusammen vor seiner Verästelung und dann läuft er parallel mit ihm am Halse, seine Fasern der Trachea abgebend.“ Diese Verhältnisse illustriert Fig. 8. Diese Arbeit hatte zum Gegenstand die isolierten respiratorischen und phonatorischen Faserbündel des Recurrens und bezog sich auch auf die Experimente RUSSEL's.[3] RUSSEL hat am lebenden Hunde den Stamm des unteren Kehlkopfnerven in drei Bündel getheilt, und elektrisch gereizt, das eine erzielte Verengerung, das zweite Erweiterung der Stimmritze, das dritte Bündel reagierte nicht. In meiner erwähnten Arbeit habe ich schon meine Meinung ausgesprochen, dass dieses dritte Bündel, dem von KANDARAZKY und von mir beschriebenen Ramus trachealis n. lar. sup. entspricht. Seitdem habe ich an einem lebenden Hunde ein Experiment ausgeführt, wo der Ramus trachealis n. lar. sup. isoliert war, ausserdem konnte ich den Stamm des unteren Kehlkopfnerven in vier Nervenbündel theilen, unter denen bei drei Bündeln auf elektrische

[1] ONODI, Beiträge zur Lehre von der Innervation etc. Monatsschrift f. Ohr., Kehlkopf etc. 1887. Nr. 4.

[2] ONODI, Archiv für Laryngologie. Bd. 7. 2. u. 3. Heft.

[3] Proceeding of the Royal Society.

Reizung Verengerung, beim vierten Bündel Erweiterung der Stimmritze resultierte. Dieses Experiment führte ich aus, um mich von der Isolierbarkeit des Ramus trachealis n. lar. sup. und der einzelnen Bündel des unteren Kehlkopfnerven am lebenden Hunde zu überzeugen. Auf die Anwendung dieser Methode einiger noch zu lösender Fragen komme ich später zurück.

Mit dem vorliegenden Gegenstande haben sich experimentell auch KOKIN[1] und RÉTHY[2] befasst. Beide illustrieren in einer Zeichnung die anatomischen Verhältnisse und beide berufen sich auf das Buch von ELLENBERGER und BAUM.[3] ELLENBERGER und BAUM haben weder KANDARAZKY's noch meine Arbeit gekannt, ebenso KOKIN und RÉTHY, daher berufen sich die Letzteren auf die Beschreibungen von ELLENBERGER und BAUM. Aus diesen Thatsachen folgt, dass das wahre Bild dieser Verhältnisse in den Beschreibungen nicht zu finden ist, und die Verwirrung der diesbezüglichen Kenntnisse durch eine neue Benennung noch gesteigert wurde. ELLENBERGER und BAUM geben folgende Beschreibung: „Der Hauptstamm des Nerv. recurrens theilt sich ausserdem meist kurz, nachdem er die Brusthöhle verlassen, in zwei fast gleich starke Aeste, welche mit einander kopfwärts verlaufen und sich am aboralen Ende der Schilddrüse wieder zu einem Stamme vereinigen. Sie verbinden sich durch feinere Fäden sowohl untereinander als auch mit denen der anderen Seite." „Der Nerv. lar. inf. selbst aber theilt sich in einen dorsalen und einen ventralen Zweig, die durch einige Fäden wieder mit einander in Verbindung stehen. Der dorsale Zweig stellt wesentlich einen Ram. communicans n. l. s. dar."

KOKIN macht auf diese Beschreibung folgende Bemerkung: „diese Beschreibung ist sogar anatomisch nur bis zu einem gewissen Grade richtig." Er selbst äussert sich folgendermaassen: „Bald nach seiner Trennung vom Vagus giebt er einige Zweige für den unteren Abschnitt der Trachea (R. tracheales). Unter der Stelle, an welcher der Nerv in den Kehlkopf eintritt, theilen sich vom Stamme grösstentheils 1—2—3, auch mehr Zweige ab, die zur

[1] KOKIN, Pflüger's Archiv f. Physiol. 1896.

[2] RÉTHY, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1898.

[3] ELLENBERGER und BAUM, Anatomie des Hundes. 1891.

Trachea ziehen, aber weiter unten gleich bei der Schilddrüse trennt sich gewöhnlich vom Stamm unter einem sehr spitzen nach unten geöffneten Winkel ein ziemlich starker Ast, der parallel dem N. recurrens, medial von ihm gelegen, abwärts zieht; im unteren aboralen Theil des Halses communiciert dieser Ast mit einem oder zwei Trachealzweigen des Recurrens, oder zuweilen mit einem Trachealzweige des Vagus. Von diesem Aste des Stammes des Recurrens, den ich der Kürze wegen Nervus trachealis nennen will, trennen sich oben und unten Zweige unter sehr spitzem Winkel, der für die oberen Zweige nach unten, für die unteren nach oben geöffnet ist. Zu diesem Nerv gelangen häufig am aboralen Theil des Halses zarte Rr. commun. vom Recurrens." „Der Nervus trachealis besteht aus Fasern, die von oben nach unten und von unten nach oben ziehen; erstere bilden die Fortsetzung eines Theiles des inneren Astes des N. l. s., der sich wahrscheinlich durch die GALEN'sche Anastomose schon in der Kehlkopfregion dem N. lar. inf. beigesellt, aber unter dem Kehlkopf sich von ihm zuerst in Gestalt einzelner Zweige, dann als selbständiger Nerv abtrennt, um sich im oberen und mittleren Abschnitt der Trachea zu verzweigen. Letztere Nervenfasern, also die, die von unten nach oben ziehen, gelangen hierher entweder nur vom N. recurrens oder vom Recurrens und Vagus und versorgen den mittleren und theilweise auch oberen Abschnitt der Trachea."

RÉTHY erwähnt die Arbeiten von KOKIN und ELLENBERGER und BAUM, die letzteren bei dem von ihm gebrauchten Ausdruck „Nebenrecurrens." Aus seinem Aufsatze entnehmen wir Folgendes: „Ich habe dann noch beim Hunde die Communicationsfasern auf dem Wege der Präparation im Recurrens weiter verfolgt und gefunden, dass sie in dem bei dieser Thiergattung ziemlich constanten Nebenrecurrens weiter verlaufen, in welchen Fällen der eigentliche Recurrensstamm von ihnen frei bleibt. Die meisten dieser Communicansfasern giebt der Nebenrecurrens schon hoch oben an die Trachea ab, ein Theil geht zum Oesophagus, während die unteren Aestchen relativ wenige Communicansfasern führen; doch sendet der Nebenstamm, wie ich mich durch Präparation und mikroskopische Untersuchung der excidierten Nervenpartien

überzeugen konnte, auch von unten her Fasern zu den abgehenden Aestchen, so dass fast jedes von oben sowohl wie auch von unten her Fasern bekommt."

„Zuweilen vereinigt sich der Nebenrecurrens weit unten wieder mit dem Recurrens und dann gehen die Communicansfasern in einem stärkeren Trachealstämmchen nach unten und verlassen dasselbe allmählich mittelst feiner Aestchen. Ist dagegen ein solcher Nebenrecurrens gar nicht vorhanden, so verlaufen die Communicansfasern grösstentheils mit den oberen zur Trachea abgehenden Aestchen peripherwärts und nur ein kleiner Theil lässt sich eine kurze Strecke im Recurrens centralwärts weiter verfolgen."

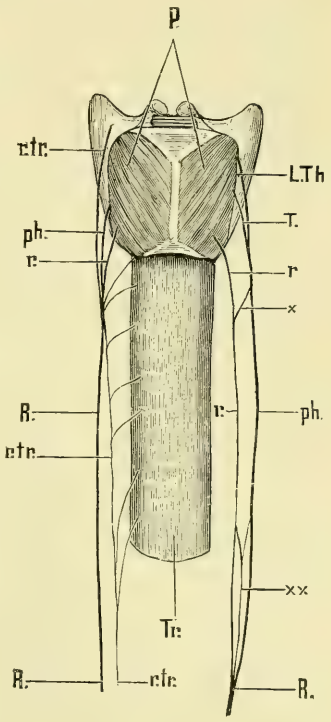


Fig. 8.

Hund. Rechts ist der Recurrens zerlegt, links die normalen anatomischen Verhältnisse, mit den Recurrens parallel verlaufenden Ram. trachealis n. lar. sup. *R.* Recurrens. *P.* Posticus. *Tr.* Trachea. *r. tr.* ramus trachealis n. lar. sup. *L. Th.* Nerv der Mm. cricoarytaenoideus lateralis und thyreoarytaenoideus. *T* Nerv des Musc. transversus. *r r* Nerv des Posticus, respiratorisches Bündel. × Phonatorische Fasern, welche die Bahn des respiratorischen Bündels verlassen. ×× Phonatorisches Bündel, dessen Zweigchen sich dem respiratorischen Bündel anschmiegt.

Wie wir gesehen haben, wurden drei Benennungen gebraucht: 1. Ramus trachealis nervi laryngei superioris (KANDARAZKY, ÓNODI), 2. Nervus trachealis (KOKIN), 3. Nebenrecurrens (RÉTHY). Den Bezeichnungen entsprechend sind auch die Beschreibungen verschieden. Nach unseren neueren Untersuchungen können wir behaupten, dass von diesen Beschreibungen keine den thatsächlichen Verhältnissen entspricht, da diese morphologischen Erscheinungen keinen constanten Charakter besitzen. KANDARAZKY erwähnt jene Fälle als Varietäten, in welchen der Ram. trachealis n. lar. sup. nicht als selbständiger Nerv erscheint und sagt: „Diese Variationen stören keinesfalls den Grundplan." Ganz entgegengesetzt lautet die Beschreibung von ELLENBERGER und

Baum, und Kokin corrigiert die letztere. Die Figuren von Kokin und Réthy entsprechen einander, stehen aber im starken Gegensatz zu den Figuren von Kandarazky und Ónodi. Die ersteren illustrieren eine Nervenschleife, welche Kokin als Nervus trachealis und Réthy als Nebenrecurrens bezeichnet. In der Figur von Kandarazky sehen wir einen selbständigen Nerven, welcher ganz oben mit dem Recurrens zusammenhängt und dann als Ramus trachealis n. lar. sup. zum Vagus läuft. Unsere Figur illustriert den Ram. trachealis n. lar. sup. auch als selbständigen Nerv. Mit dem Namen ist das Wesen seines Ursprunges gekennzeichnet worden. Kandarazky hat das Hauptgewicht darauf gelegt, die directe Fortsetzung der Ansa Galeni in diesem Zweige zu beweisen; doch war er im Reinen damit, dass auch Fasern des Recurrens darin enthalten sind, indem er sagt: in dem Trachealzweig finden sich auf- und absteigende Fasern"; „die ganze obere Hälfte der Trachea wird vom Trachealzweig aus und vom N. recurrens aus innerviert." Dagegen bezeichnet Kokin nur mit Wahrscheinlichkeit die Ansa Galeni als die Bahn der von oben nach unten ziehenden Nervenfasern, indem er schreibt: „erstere bilden die Fortsetzung eines Theiles des inneren Astes des Nerv lar. sup., der sich wahrscheinlich durch die Galen'sche Anastomose schon in der Kehlkopfregion dem Nerv. lar. inf. beigesellt." Diesbezüglich sagt Réthy: „Der Recurrens oder der Nebenrecurrens, wo ein solcher vorhanden ist, führt demnach in seinen oberen Partien centripetale, eigentlich dem Nerv. lar. sup. angehörende Fasern. Als Réthy die Bezeichnung Nebenrecurrens zuerst gebraucht, citiert er die Beschreibung von Ellenberger und Baum, nach welcher der Stamm des Recurrens gleich nach seinem Ursprunge sich in zwei gleich starke Zweige theilt, welche nebeneinander verlaufend am unteren Ende der Schilddrüse sich wieder vereinigen. Diese morphologische Erscheinung wird von Réthy als „ziemlich constanter Nebenrecurrens" aufgefasst. Unsere Meinung geht dahin, dass diese Bezeichnung verfehlt und überflüssig ist, denn sie entspricht nicht dem Wesen des damit bezeichneten Nerven, andererseits können die von Ellenberger und Baum beschriebenen morphologischen Verhältnisse nicht als normale betrachtet werden, es handelt sich nur um eine Varietät,

die in der beschriebenen Form selten vorkommt. Die Bezeichnung Nebenrecurrens könnte nur in Fällen solcher anatomischen Anomalien berechtigt sein, wo thatsächlich der Nervus recurrens in überzähliger Form, doppelt erscheint, wie dies auch WRISBERG[1] beim Menschen beobachtet hat. In diesen Fällen, wo der überzählige Recurrens unterhalb des Ursprunges des normalen Recurrens den Vagusstamm verlassen hat und beide neben einander zwischen Trachea und Oesophagus verliefen, und später sich vereinigten, in diesen Fällen wäre die Bezeichnung „Nebenrecurrens", die Bezeichnung einer Anomalie am Platze. Wir werden aber auch die anderen Bezeichnungen modificieren, da man mit ihnen keine constanten morphologischen Verhältnisse bezeichnen kann. Nach unseren Untersuchungen können die beschriebenen Verhältnisse auftreten, wir wollen daher dem Wesen des Faserverlaufes und der Formverhältnisse entsprechend die passenden Bezeichnungen aufstellen. Zuerst wollen wir die Figur 9 näher betrachten, welche auf beiden Seiten die Verhältnisse illustriert.

Die Figur zeigt auf beiden Seiten die Ansa Galeni, welche dann als Ramus trachealis n. laryng. sup. vom Stamme des Recurrens sich trennt und weiter unten sich wieder mit ihm vereinigt. Es ist auf beiden Seiten eine Schlinge vorhanden, aus welcher Aeste zur Trachea und zum Oesophagus ziehen. Zwischen der Ansa Galeni und dieser Schlinge entspringen aus dem Recurrensstamm einzelne Fäden zur Trachea. Auf der linken Seite ist nur eine Schlinge vorhanden, unterhalb dieser Schlinge giebt der Recurrensstamm mehrere Zweige zur Luftröhre und zur Speiseröhre; der linke Recurrens entspringt mit drei Wurzeln aus dem Vagus und nach seinem Ursprung giebt er zwei Zweige zum unteren Theil der Luftröhre, die anderen Trachealzweige entstammen vom Vagus. Auf der rechten Seite sind ausser der erwähnten Schlinge noch zwei vorhanden, aus jeder entspringen Aestchen zur Trachea und zum Oesophagus. Der Recurrens selbst steht mit zwei Fäden mit dem unteren Halsganglion in Verbindung, nahe seinem Ursprunge giebt er einen stärkeren Trachealzweig zum unteren Theil der Trachea, die anderen Zweige kommen

[1] HENLE, Nervenlehre. 1879.

vom Vagus. Die linksseitige Schlinge entspricht den Zeichnungen von KOKIN und RÉTHY, während das rechtsseitige Bild mit der dreifachen Schlinge von allen mitgetheilten Figuren abweicht. Unsere Untersuchungen haben die von ELLENBERGER und BAUM beschriebenen Verhältnisse nicht constatieren können, wir betrachten sie deshalb für eine Varietät. Weiterhin konnten wir uns nicht davon überzeugen, dass die von ihnen beschriebenen Nerven mit einander und mit jenen der entgegengesetzten Seite zusammenhängen, und dass der dorsale und ventrale Endast des Recurrens mit einander durch einige Fäden verbunden sind. Zur Orientierung der Beschreibung und Auffassung von ELLENBERGER und BAUM erwähnen wir die Beschreibung des wichtigsten Recurrensastes: „Der dorsale Zweig stellt wesentlich einen Ramus communicans zum Nerv. lar. sup. dar." Dieser Ast giebt Zweige für den M. cricoarytaenoideus posticus und den M. arytaenoideus transversus. Wir haben gefunden, dass die Verhältnisse, wie sie in den Abbildungen von KOKIN und RÉTHY wiedergegeben sind, häufig vorkommen, aber schon KANDARAZKY hat sie als Varietät erwähnt. Ebenso kommt häufig jener Verlauf vor, den die Abbildungen von KANDARAZKY und von mir illustrieren, d. h. das Vorkommen des Ramus trachealis N. lar. sup. KANDARAZKY hat aber diesen Zweig als die directe Fortsetzung des oberen Kehlkopfnerven betrachtet und die Verbindung der Ansa Galeni mit dem Recurrens nur als eine scheinbare. Dagegen fanden wir, dass die Ansa Galeni mit dem grössten Theil ihrer Fasern in die Bahn des Ramus trachealis N. lar. sup. tritt, ein kleiner Theil der Fasern aber mit dem Recurrens in Zusammenhang steht. Die bisherigen Ansichten vereinigen sich darin, dass die Nerven der Luftröhre von den oberen und den unteren Kehlkopfnerven stammen. Wie wir gesehen haben, sind nur die morphologischen Erscheinungen verschieden und deshalb bezeichnen wir den Thatsachen entsprechend den zum grössten Theile vom Laryngeus superior herrührende Fasern enthaltenden Ast als Ramus trachealis n. laryngei superioris und die unteren vom Recurrens entspringenden Zweige als Rami tracheales n. laryngei inferioris. Sowohl der obere wie die unteren Trachealzweige können selbständig verlaufen. Von den letzteren ist es gewöhnlich ein Trachealzweig (zuweilen zwei),

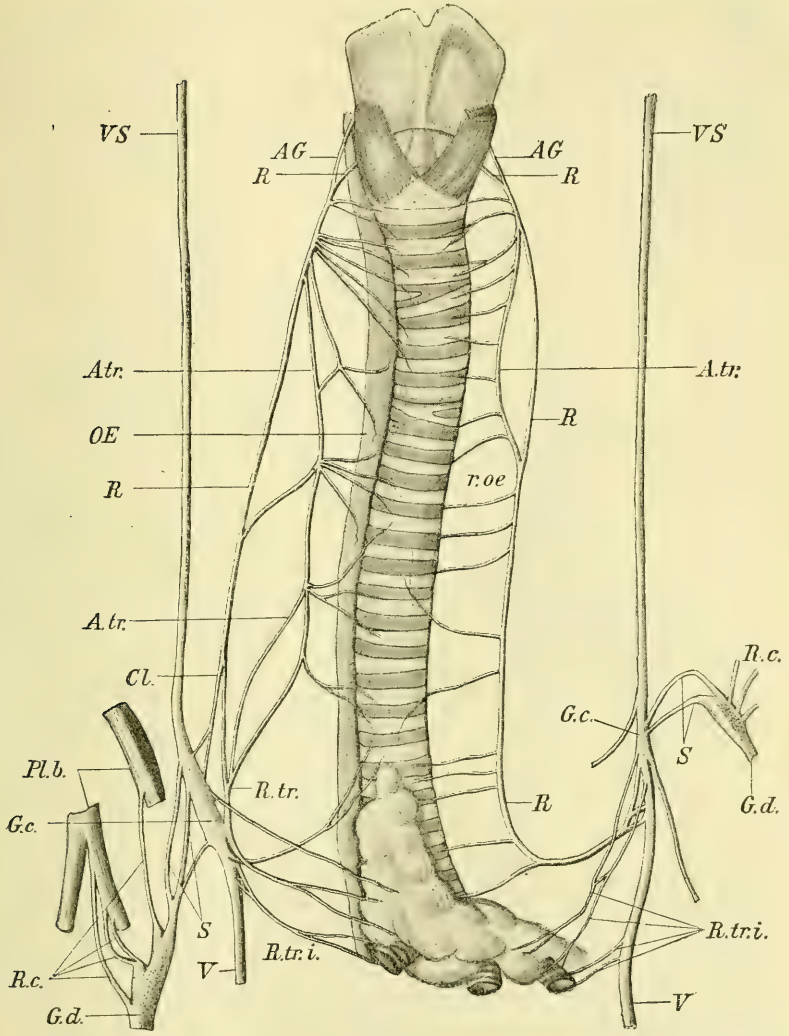


Fig. 9.

Hund. Die Nerven der Trachea sind bis zu den Bronchien, welche mit Fett und Bindegewebe bedeckt sind, verfolgt. *VS* Vagosympathicus. *G. c.* Ganglion cervicale inf. *G. d.* Ganglion dorsale prim. *R. c.* Rami communicantes zum Plexus brachialis. *S* Sympathischer Grenzstrang zwischen beiden Ganglien. *V* Vagus. *R. tr.* Rami tracheales inf. *R* Nervus laryngeus inf. *Pl. b.* Plexus brachialis. *Cl* Verbindung zwischen Recurrens und Ganglion cervicale inf. *R. tr.* Ramus trachealis nervi l. inf., welcher zur Bildung der Ansa trachealis bestimmt ist. *A. tr.* Ansa trachealis. *Oe.* Oesophagus. *r. oe.* Rami oesophagei. *AG* Ansa Galeni. Sowohl der Recurrens wie die Ansa trachealis geben zahlreiche Fäden zur Trachea und einige zum Oesophagus.

welcher sich mit dem Ramus trachealis n. lar. inf. verbindet und mit demselben eine Schlinge bildet, die wir Ansa trachealis nennen wollen. Die morphologischen Erscheinungen also, die wir häufiger beim Hunde antreffen, sind folgende: Ramus trachealis nervi laryngei superioris, Ansa trachealis, Rami tracheales nervi laryngei inferioris.

Jetzt bleibt uns noch übrig, jenes Verhältniss zu beleuchten, welches zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven einerseits und dem Sympathicus und den Herznerven andererseits besteht. Zuerst betrachten wir die Verbindungen des oberen Kehlkopfnerven mit dem Sympathicus. Was den Stamm des Laryngeus superior betrifft, so finden wir wenig Angaben. RÜDINGER erwähnt, dass der Laryngeus superior mit einem Faden mit dem oberen Halsknoten zusammenhängt. HOLLSTEIN erwähnt dieselbe Verbindung und noch eine mit dem oberen Herznerven.

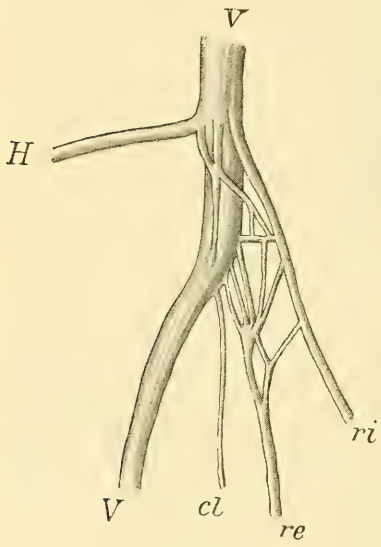


Fig. 10.

V Vagus. *H* Hypoglossus. *cl* Ram. cardiacus laryngei. *re* Ram. externus. *ri* Ram. internus.

Professor THANHOFFER hatte die Güte, mir ein Präparat zu zeigen, wo ein Faden den Laryngeus superior mit dem unteren Halsknoten verbindet. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist es, welcher in engerem Zusammenhang steht sowohl mit dem oberen Halsknoten wie auch mit den oberen Herznerven. Wir halten diese letztere Verbindung für wichtig, weil wir auch auf Grund unserer früheren Untersuchungen[1] beim Menschen den Nervus depressor ganz analog halten dem Herzzweig des äusseren Astes des oberen Kehlkopfnerven, welcher selbständig oder in

[1] Archiv f. Anat. 1880.

Verbindung mit den oberen Herznerven verlaufen kann. Bevor wir die Verbindungen des Ramus externus n. lar. sup. zusammenfassen, wollen wir einige Anomalien erwähnen, die sich auf Ursprung und Verbindungen des oberen Kehlkopfnerven beziehen. So habe ich beim Menschen ein Geflecht (Fig. 10) zwischen Vagus und Laryngeus superior beobachtet, welches 1 cm breit und 2,5 cm lang war. Der innere Ast des Laryngeus superior stand mit dem Geflecht in Verbindung und entsprang oberhalb desselben vom Vagus, der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven hatte sich aus dem Geflecht zusammengesetzt und der Ramus cardiacus kam vom Vagus. Eine Geflechtbildung, aus welcher der Stamm des Nervus laryngeus superior entstand, habe ich beim Pferd (Fig. 11) beobachtet. In einem Falle sah ich beim Menschen, dass der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven mit zwei Wurzeln entsprungen ist (Fig. 12), die eine vom oberen Kehlkopfnerven, die andere vom Vagus; der äussere Ast stand je durch einen Faden mit dem oberen Halsknoten und mit dem oberen Herznerven in Verbindung. In einem anderen Falle, ebenfalls beim Menschen, habe ich beobachtet, dass der äussere und der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven isoliert ihren Ursprung nahmen vom Vagusstamme; ausserdem war der innere Ast mit dem Vagusstamme noch verbunden, ferner gab der innere Ast einen Ramus cardiacus,

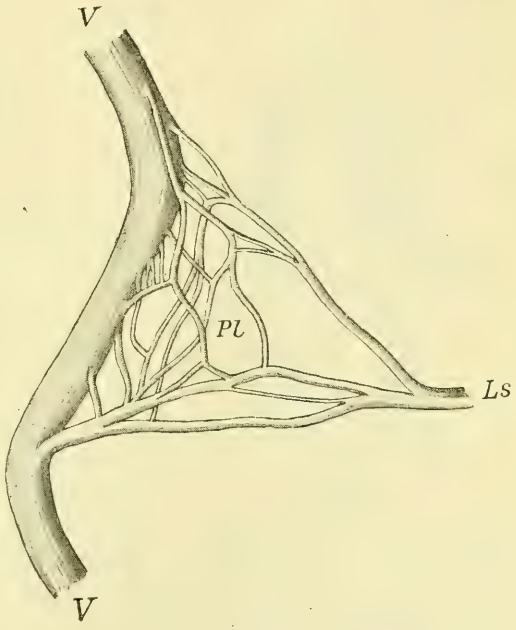


Fig. 11.

V Vagus. *Ls* Laryngeus sup. *Pl* Geflechtbildung.

der sich auch mit dem äusseren Aste verband (Fig. 13). In einem Falle sah ich beim Menschen den Laryngeus superior mit zwei Wurzeln seinen Ursprung nehmen vom Vagusstamme, von der äusseren Wurzel ging ein Zweigchen zum Vagusstamm, ferner ein Ramus cardiacus (Fig. 14).

Der Ramus externus n. lar. sup. giebt direct einen Herznerven (HENLE, HENLE-MERKEL, ÓNODI).

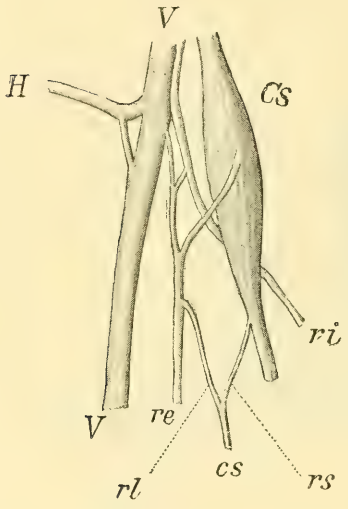


Fig. 12.

V Vagus. *H* Hypoglossus. *Cs* Oberes Halsganglion. *ri* Ramus internus. *re* Ramus externus. *cs* Nervus cardiacus sup. *rl* Wurzel vom Ram. externus. *rs* Wurzel vom oberen Halsganglion.

Der Ramus externus n. lar. sup. steht in Verbindung mit dem oberen Halsknoten und mit dem oberen Herznerven (Fig. 12, KRAUSE, SAPPEY).

Der Ramus externus n. lar. sup. steht in Zusammenhang mit dem oberen Halsknoten (SCHWALBE, GEGENBAUR, HARTMANN, HENLE, LUSCHKA).

Der Ramus externus n. lar. sup. anastomosiert mit dem oberen Herznerven (QUAIN-HOFFMANN, ALPIGER, DROBNIK, ZUCKERKANDL).

Diese verschiedenen Beobachtungen zeigen, dass die Verbindung des oberen Kehlkopfnerven mit dem oberen Halsknoten und dem oberen Herznerven wie auch mit dem Herzgeflechte constant existiert und dass sich nur die morphologischen Erscheinungen ändern.

An dieser Stelle erwähnen wir noch den von den französischen Anatomen mit Vorliebe behaltenen Plexus laryngeus. Nach HIRSCHFELD bilden den Plexus laryngeus Fäden vom Ramus externus n. lar. sup., vom oberen Halsknoten und vom Plexus pharyngeus. Nach SAPPEY setzt sich der Plexus laryngeus aus Fäden vom Ramus externus n. lar. sup. und vom oberen Halsknoten zusammen. Nach TESTUT und DEBIERRE wird der Plexus laryngeus von sympathischen Zweigen und von Fäden des Ramus externus n. lar. sup. gebildet.

Die deutschen Anatomen erwähnen diesen Plexus laryngeus nicht mehr. Nach unseren Erfahrungen können wir sagen, dass es richtiger ist, diese Bezeichnung Plexus laryngeus fallen zu lassen, denn er kann als normale constante morphologische Erscheinung nicht betrachtet werden und giebt daher nur Anlass zur Verwirrung. Thatsache ist, dass sympathische Zweige der Art. thyreoidea sup. entlang ein Geflecht bilden können, welches zuweilen einen Faden vom Ramus externus n. lar. sup. aufnehmen kann.

Und nun wollen wir jene Verbindungen erwähnen, welche zwischen dem Laryngeus sup., Sympathicus und Laryngeus inf. beschrieben worden sind. SOEMMERING[1] sagt: „Der Cardiacus superior zieht Fäden aus dem oberen und dem unteren Kehlkopfnerven". Nach LÀUTH[2] verbindet sich der Ramus ext. n. lar. sup. mit dem oberen Herznerven, welcher dann zum Laryng. inf. zieht. ALPIGER schreibt: „Richtig ist, dass vom Sympathicus bisweilen Nerven vom Volumen eines Cardiacus sup. zum Recurrens gehen". ALPIGER illustriert in einer Figur diese Verbindung. DROBNIK betrachtet die Verbindung des Recurrens mit dem Halssympathicus als eine constante. „Der Faseraustausch zwischen dem Halstheil des sympathischen Nervensystems und dem N. recurrens vagi ist constant und vollzieht sich durch die Vermittelung von Nervenästen, die hauptsächlich vom Ram. card. sup. zum N. recurrens vagi selbst oder zu seinen Zweigen ziehen." Die Verbindungszweige kommen vom oberen Halsknoten, hängen mit dem Ramus communicans des Ramus ext. n. lar. sup. zusammen und verbinden sich vor der Verästelung der Art. thyreoidea inf. mit dem unteren Kehlkopfnerven. Die Figur zeigt zwei Fäden, welche vom oberen Halsknoten kommend direct zum

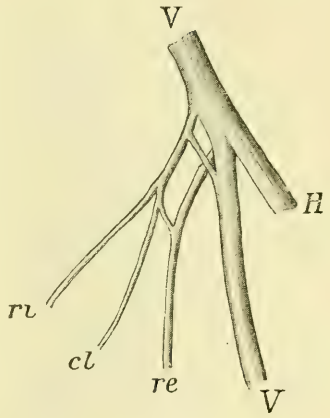


Fig. 13.

V Vagus. *H* Hypoglossus. *cl* Ramus cardiacus laryngei. *re* Ramus externus. *ri* Ramus internus.

[1] SOEMMERING, Vom Baue des menschl. Körpers. 1791.

[2] LAUTH, Neues Handbuch der pr. Anat. 1836.

Stamme des unteren Kehlkopfnerven unterhalb der Schilddrüse gehen. Manchmal ist die Anastomose zwischen den Sympathicuszweigen und dem Recurrens in Form eines Geflechtes vorhanden.

Das enge Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus demonstriert die hochinteressante Anomalie, die Prof. Lenhossék[1] beim Menschen beobachtet hat. Wegen seiner Wichtigkeit geben wir die Beschreibung mit der Abbildung (Fig. 15). „Der Recurrens entspringt nicht vom Vagus wie gewöhnlich, sondern von einem Ganglion, welches wir Ganglion laryngeum nennen. Dieses Ganglion ist länglich, halbmondförmig, 1,5 cm lang, 0,6 cm dick. Eine schwache Einschnürung theilt es in einen vorderen und hinteren Theil. Der normal starke (2,5 cm) Recurrens scheint aus diesen beiden Theilen mit zwei Wurzeln zu entspringen. Mit dem Ganglion sind mehrere Nervenfäden verbunden; ein Theil geht zum Ganglion, der andere Theil verlässt es. Zur ersten Gruppe gehören: vom Vagus nimmt es eine Wurzel auf (a), diese entspringt wie unter normalen Verhältnissen der Recurrens, ist 0,5 cm stark und geht zum vorderen Ende des Ganglion. Die anderen Wurzeln erhält das Ganglion vom Sympathicus. Zum vorderen Theil kommt ein Nervenfaden (b), welcher von der Ansa Vieusseni und vom unteren Halsknoten entspringt. Stärkere Aeste nimmt das Ganglion am hinteren Ende auf: ein starker Zweig (c), welcher vom ersten Brustknoten entspringt und mit zwei Aestchen zum Ganglion geht. Die peripheren Aeste des Ganglions sind Folgende: Ein Zweig zum Vagus (d), ein Zweig zur Aorta (e), ein anderer Zweig (f) zur Trachea, wo er in mehrere Aestchen zerfällt und zuletzt ein Zweig (g), welcher zum Herzgeflecht zieht.“ „Was den Ursprung des unteren Kehlkopfnerven betrifft, beweist unser Fall, dass seine Fasern grösstentheils von jenem

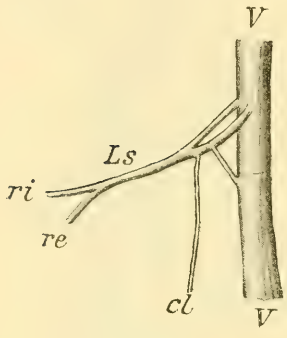


Fig. 14.

V Vagus. *Ls* Laryngeus sup. *cl* Ramus cardiacus laryngei. *re* Ramus externus. *ri* Ramus internus.

[1] Lenhossék, Természettudományi Közlöny. 1889.

Theile des Sympathicus stammen, welcher sich vom unteren Halsknoten bis zum ersten Brustknoten erstreckt.“ Dieser Fall ist die einzige Beobachtung beim Menschen, welche das innige Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus in so auffallender Weise beleuchtet.

Unsere Untersuchungen[1], welche sich auf die isolierten Nervenbündel des Recurrens beziehen, haben beim Pferde zwei Thatsachen erzielt. Es ist uns gelungen, beim Pferd die isolierten respiratorischen und phonatorischen Nervenbündel in der Länge von 88 cm in den Stämmen des Recurrens und des Vagus zu verfolgen. Beim Menschen und beim Hunde ist uns die Isolierung am Hals gelungen, hingegen war dieselbe beim Rind wegen der ausgedehnten Geflechtbildung nicht ausführbar. Die zweite erkannte Thatsache war die enge Verbindung des isolierten respiratorischen Bündels mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci. Das isolierte phonatorische Bündel hängt mit einem Faden theils mit der Ansa Vieusseni, theils mit dem Ramus cardiacus zusammen. Auffallend ist aber das enge Verhältniss des respiratorischen Bündels mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci. Acht Verbindungsfäden waren in verschiedenen Richtungen zu sehen. Auf diese Thatsachen kommen wir noch zurück. In den anatomischen Lehrbüchern wird allgemein erwähnt, dass der Recurrens an seiner Ursprungsstelle die Rami cardiaci, in seinem weiteren Verlaufe die Rami tracheales und oesophagei entsendet. Die Verbindung des Recurrensstammes mit den unteren Halsknoten erwähnen: Henle, Schwalbe, Rauber, Henle-Merkel, van Gehuchten. Nach Krause soll ausserdem noch ein Verbindungszweig zum unteren Halsknoten gehen.

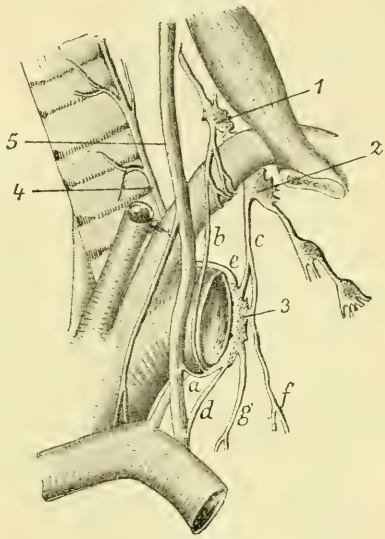


Fig. 15.

[1] Ónodi, Archiv f. Laryngologie. 1898. Bd. 7.

Den Zusammenhang des Recurrens mit den aus den mittleren und unteren Halsknoten kommenden Herznerven beschreibt HYRTL, HARTMANN, SAPPEY. Nach QUAIN-HOFFMANN hängt der Recurrens mit dem oberen Herznerven zusammen. Sonst werden bei der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven einfach erwähnt die Rami cardiaci, welche an der Bildung des Plexus cardiacus theilnehmen und nahe seines Ursprunges entstehen.

Bei unseren Untersuchungen haben wir besonderes Gewicht auf den Ursprung der Herznerven gelegt. Wir geben eine Abbildung (Fig. 16) unseres Präparates, welche sich auf das Pferd bezieht und klar demonstriert, theils das Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus und zu den Rami cardiaci, theils die gesammten Wurzeln der Nervi cardiaci. Man sieht gut jene Wurzeln der Herznerven, welche vom Vagusstamme kommen, unter denen die erste, d. h. die oberste, von der Ursprungsstelle des Recurrens aus dem Vagusstamme; man überblickt auch jene Wurzeln der Herznerven, welche dem vom unteren Halsknoten und der Ansa Vieusseni kommenden sympathischen Nervenstrang entspringen. Ausserdem ist zu sehen, dass der Recurrens durch mehrere Fäden mit dem Sympathicus zusammenhängt und dass sowohl aus dem centralen wie auch aus dem peripheren Theile des Recurrens Verbindungszweige zu den Herznerven gehen. Diese Untersuchung zeigt uns, dass die Wurzeln der Herznerven sich aus dem Vagus, dem Sympathicus, dem centralen und dem peripheren Theile des Recurrens zusammensetzen. Wenn wir diese Thatsachen mit den anatomischen Verhältnissen der isolierten phonatorischen und respiratorischen Nervenbündel des Recurrens in Zusammenhang bringen, so können wir sagen, dass die mitgetheilten Verbindungen des Recurrens mit dem Sympathicus und mit den Nervi cardiaci zum grössten Theil mit dem im Stamme des Recurrens isoliert verlaufenden respiratorischen Nervenbündel zusammenhängen. Somit haben wir unsere Untersuchungen mit bisher bekannten Angaben erörtert und unsererseits die anatomische Forschung der Kehlkopfnerven beendigt. Die Kenntniss der feineren anatomischen Verhältnisse zeigt deutlich jene Richtung, welche die physiologische und experimentelle Forschung einzuschlagen hat. Es häufen sich viele offene Fragen, deren Lösung

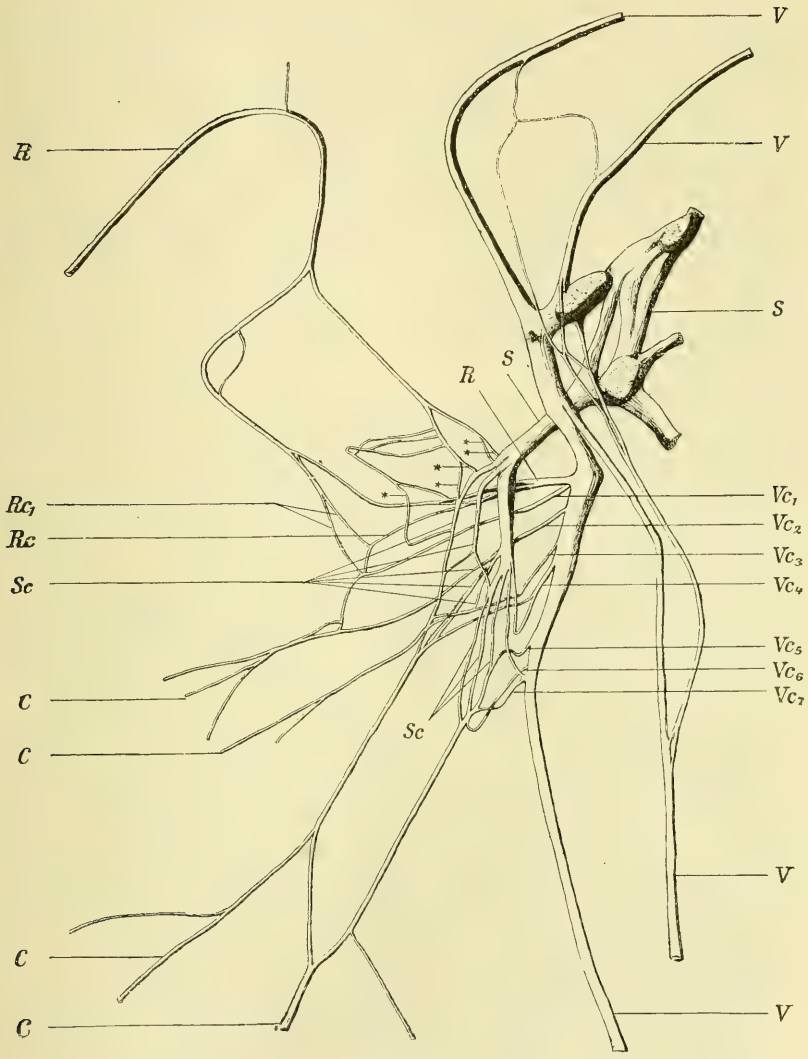


Fig. 16.

Pferd. Es sind die Verbindungen des Recurrens mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci sowie die einzelnen Wurzeln der Rami cardiaci zu überblicken. *V* Vagus. *R* Nervus laryngeus inferior. *C* Rami cardiaci. *S* Ansa Vieusseni, von welcher ein Strang die sympathischen Wurzeln *Sc* zu den Rami cardiaci entsendet, ferner mehrfache Verbindungen mit dem Recurrens eingeht. Vc_1—Vc_7 Wurzeln der Rami cardiaci aus dem Vagus, unter ihnen stammt der erste Vc_1 aus der Ursprungsstelle des Recurrens. *Rc* Verbindung des Ramus cardiacus mit dem peripheren Theile des Recurrens.

von experimentellen Studien zu erwarten ist. Die bisherigen Experimente waren zumeist allgemein gehalten und bewegten sich um den sensiblen oder motorischen Charakter der entsprechenden Kehlkopfnerven. Einzelne Experimente beschäftigten sich mit der Frage der centripetalen Nervenfasern, andere mit den isolierten Nervenzweigen und mit den einzelnen Kehlkopfmuskeln. Absichtlich haben wir weder die eigenen noch die bekannten experimentellen Resultate berührt, dies behalte ich nach Beendigung meiner experimentellen Untersuchungen einer anderen Arbeit vor. Bei dieser Gelegenheit wollte ich nur die anatomischen Thatsachen auf Grund meiner eigenen Untersuchungen und der bekannten Angaben besprechen.

Die erwähnten Thatsachen zeigen, dass die Anatomie der Kehlkopfnerven nicht so einfach ist, wie es im Allgemeinen erscheint, dass die durch mannigfache Verbindungen und verschiedene Faserbündel verwickelten Verhältnisse noch so mancher Aufklärung bedürfen. Wie wir gesehen haben, sind im Recurrensstamme Nervenfasern enthalten, die zur Luftröhre, zur Speiseröhre, zu den Muskeln und zur Schleimhaut des Kehlkopfes gehen, ausserdem sind Faserbündel vorhanden, welche mit den Bahnen des Sympathicus, der Herznerven und des oberen Kehlkopfnerven in Zusammenhang stehen. Die sympathischen Bündel führen ebenso sympathische wie cerebrospinale Fasern. Ueber die cerebrospinalen Faserbündel des sympathischen Grenzstranges und seiner Rami communicantes habe ich ausführlich in meinem erwähnten Aufsatz gesprochen. Wir haben gesehen, dass das isolierte respiratorische Bündel des Recurrens besonders innig verbunden ist mit dem Sympathicus und mit den Herznerven.

Ferner haben wir gesehen, dass sowohl in der Bahn der Ansa Galeni, wie besonders im Gebiete des Musc. arytaenoideus transversus der obere und der untere Kehlkopfnerv ihre Fasern mehrfach austauschen. Theils durch die sympathischen Verbindungen, theils durch die mehrfachen Anastomosen des oberen und unteren Kehlkopfnerven ist die morphologische Grundlage zum Austausch der Nervenfasern verschiedenen Ursprunges und Verlaufes gegeben. Diese Untersuchungen zeigen die Richtung, die verschiedenen Fragen, die ihrer Lösung harren. Wir müssen die Bedeutung

der verschiedenen Faserbündel feststellen, welche in der Bahn des Laryngeus superior und besonders in der Bahn des Recurrens verlaufen. Welche Rolle fällt den sympathischen Verbindungen zu, welche Bedeutung den Verbindungen des isolierten respiratorischen Nervenbündels im Recurrens mit dem Sympathicus und den Nervi cardiaci? Wir müssen die Bestimmungen der centrifugalen Bahnen bezeichnen, den weiteren Verlauf und das Schicksal der einzelnen Faserbündel, welche gegenseitig in die Bahn des oberen oder des unteren Kehlkopfnerven eintreten. Ich habe somit jene Fragen bezeichnet, welche experimentell untersucht werden müssen und unsererseits auch planmässig bearbeitet werden. Ich möchte noch erwähnen, dass ich es für wichtig halte, die Aufmerksamkeit auf die experimentellen Methoden zu lenken. Ich empfehle das Studium der isolierten Nervenbündel mit den von mir und RUSSEL angegebenen Methoden. Ich selbst werde die sympathischen Verbindungen, im Allgemeinen mit den Kehlkopfnerven zusammenhängenden Nervenäste untersuchen, den Recurrens selbst theilweise mit meiner älteren Methode, die anatomisch isolierten Muskelzweige, theilweise mit der von RUSSEL beschriebenen und seither von mir angewendeten Methode die künstlich isolierten Recurrensbündel prüfen. Ich lege Gewicht darauf, dass bei der Reizung und Untersuchung der einzelnen ganzen oder durchschnittenen Bündel der Zusammenhang zwischen Vagus und Kehlkopf nicht unterbrochen werde. Bei dem bisherigen Verfahren wurde der Kehlkopfnerv im Ganzen oder durchschnitten untersucht, bei den von mir angegebenen und angewandten Methoden kann jedes einzelne Bündel im Ganzen oder durchschnitten untersucht werden, ohne dass der Contact zwischen den Nervenstämmen, Peripherie und Centrum gänzlich unterbrochen wird. Nach Beendigung unserer experimentellen Studien werde ich an dieser Stelle meine Erfahrungen mittheilen. Es ist meine feste Ueberzeugung, dass wir ohne die vollständige anatomische und physiologische Kenntniss der Kehlkopfnerven die zahlreichen Streitfragen nicht lösen werden, welche seit vielen Jahren noch immer in der Pathologie der nervösen Kehlkopferkrankungen auf der Tagesordnung stehen.

5.

DAS SUBCEREBRALE PHONATIONSCENTRUM.

Vorgetragen in der ungarischen Academie der Wissenschaften am 13. Februar 1899.

Von Dr. A. ÓNODI, Prof. an der Universität Budapest.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Math. und Naturwiss. Anzeiger) Bd. XVII, pag. 467—480.

Meine auf diesen Gegenstand bezüglichen experimentellen Untersuchungen sind ausführlich in meinen veröffentlichten Arbeiten* beschrieben. Das Resultat dieser Untersuchungen ist, dass beim Hunde am Boden des vierten Gehirnventrikels zwischen dem Vagusgebiete und den hinteren Vierhügeln ein zweites Phonationscentrum existiert, welches die Stimmbildung aufrecht erhält auch dann, wenn das Gehirn zwischen den vorderen und hinteren Vierhügeln von dem verlängertem Marke total abgetrennt wird; andererseits aber wird die Stimmbildung aufgehoben und nur die Athmung bleibt erhalten, wenn das verlängerte Mark oberhalb des Vagusgebietes, also unterhalb des subcerebralen Phonationscentrums total durchschnitten wird. Bei dieser Gelegenheit befasse ich mich nicht mit den diese Frage betreffenden bekräftigenden oder widersprechenden Aufsätzen, ich erwähne nur die bekräftigende Arbeit des Professor BECHTEREW**, ferner die Aufsätze von KLEMPERER*** und GRABOWER†. Auf diese letzteren habe ich meine

* Die Phonation im Gehirn. Berl. klin. Wochenschr. 1894. Die Innervation des Kehlkopfes. Wien 1895.

** BECHTEREW, Neurologisches Centralbl. 1895.

*** Archiv f. Laryngologie. 1895.

† Archiv f. Laryngologie. 1897.

Bemerkungen in zwei Notizen* und in einer Arbeit** gemacht und halte ich dieselben auch aufrecht.

In dieser letzterwähnten Arbeit habe ich jene Richtung bezeichnet, welche ich zur Lösung der Frage eingeschlagen habe. Ich habe meine experimentellen Resultate mit meinen Untersuchungen der phonierenden perforierten Neugeborenen und Missgeburten verglichen und in Einklang gebracht. Ich habe die Leiter der Kliniken Prof. Th. KEZMARSZKY und W. TAUFFER ersucht, mir jene perforierten Neugeborenen und Missgeburten, welche während ihrer Lebensdauer phonierten, gütigst zur Verfügung zu stellen.

Während zwei Jahre kamen zwei phonierende perforierte Neugeborene und zwei phonierende Missgeburten zur Beobachtung. Diese Untersuchungen beschreibe ich bei dieser Gelegenheit, welche gleichfalls den physiologischen Experimenten entsprechen und dabei sich auf den Menschen beziehen und bei der Frage des subcerebralen Phonationscentrums von Wichtigkeit sind.

Die diesbezüglichen präcisen Beobachtungen und Untersuchungen sind leider so selten, dass man kaum ein, zwei Beobachtungen verwerthen kann. Die Publicationen erwähnen nur im Allgemeinen, dass die Missgeburten während ihrer Lebensdauer Laute gegeben haben, aber die vorhandenen Gehirntheile wurden weder anatomisch noch histologisch untersucht. Es sind die histologischen Untersuchungen des Rückenmarkes und des verlängerten Markes veröffentlicht worden, aber von den Lebenserscheinungen der Missgeburten ist nichts erwähnt. Dabei muss in Betracht gezogen werden, dass viele Missgeburten todt geboren werden und dass die Mehrzahl der Untersuchungen an dem in den Sammlungen aufbewahrten Material vorgenommen wurde. Was die perforierten Neugeborenen betrifft, so sind wir in derselben Lage. Ein Theil der operierten Neugeborenen ist todt, der andere Theil wird wegen Schonung der Mutter und der Umgebung, unmittelbar nach der Operation ins Wasser getaucht.

* Archiv f. Laryngologie. 1895, 1897.

** Zur Pathologie der Phonationscentren. Monatsschr. f. Ohren-, Kehlkopfkrankh. etc. 1898. Pathologie des centres de la phonation. Revue hebdomadaire de Laryngologie. 1898.

Es bleiben somit jene perforierten Neugeborene zurück, welche während ihrer kurzen Lebensdauer auch phonierten. Diese Fälle sind einfach erwähnt, aber keine einzige Untersuchung ist mitgetheilt, welche sich auf die zerstörten und intact gebliebenen Gehirntheile der phonierenden perforierten Neugeborenen beziehen würde. In neuerer Zeit macht die conservative Richtung der Geburtshilfe die Perforation der Neugeborenen noch seltener.

Ich werde die einzelnen diesbezüglichen Mittheilungen erwähnen, ferner unsere Untersuchungen, mit deren experimentellen Resultaten in Einklang bringen. Unsere Beobachtungen beziehen sich auf fünf Fälle. Ein Anencephalon, welcher todt zur Welt kam, konnte meinerseits nicht ausgenutzt werden. Ein zweiter Anencephalon lebte drei Tage und gab Laute. Zwei perforierte Neugeborene phonierten während ihrer Lebensdauer. Eine Missgeburt, Hämato-meningoencephalocele, lebte einen Tag und gab Laute.

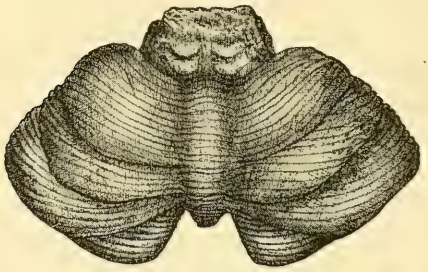


Fig. 1.
Mensch. Perforierter Neugeborener. Abtrennung des Grosshirnes in der Gegend der vorderen Vierhügel.

Was die perforierten phonierenden Neugeborenen betrifft, so habe ich in der Literatur FAVRE's Fall* gefunden, wo aber eine präcise anatomische Untersuchung fehlt. Bei einem perforierten Neugeborenen, welcher schrie, räumte FAVRE mit seinem Zeigefinger die Gehirnmassen aus, angeblich blieb nur die Medulla und das Kind schrie weiter; dann wurde das Kind durch Zerstörung der Medulla getödtet. Bei diesem Vorgehen fiel eine präcise anatomische Untersuchung der Gehirntheile weg, und es konnten nach der Ausräumung mit dem Zeigefinger, das blutige Gebiet, die Gehirntheile, nur durch die Kopfwunde beurtheilt werden, und daher kann von einer Verwerthung gar keine Rede sein.

Einen perforierten phonierenden Neugeborenen übergab mir gütigst Professor W. TAUFFER. Der perforierte Neugeborene

* VIRCHOW's Archiv. 1895. Bd. 139.

gab nach der Operation Laute und athmete. Ich behandelte den ganzen Kopf mit dem Gehirne mit Formalin und untersuchte das so in seiner Lage gehärtete Gehirn. Die Untersuchung hat neben den Läsionen der Hemisphären gezeigt, dass das Gehirn der vorderen Quadrigemina von der Medulla durchtrennt ist. Die hinteren Quadrigemina und die Pons Varoli sind vollkommen intact, der proximale Theil der vorderen Quadrigemina und die Pedunculi cerebri sind zerstört. Die Zerstörung des rechten Pedunculus reicht bis zur durchsichtigen, kaum 1 mm dicken äusseren Fläche desselben. Aber $^1/_2$ cm oberhalb dieser äusserst dünnen Verbindung vertieft sich nach aussen in den Sehhügel eine 2 cm tiefe Läsion, so dass die Durchtrennung als fast vollkommen betrachtet werden muss. Die Figur 1 bezieht sich auf dieses Präparat, welches aber bei den mehrfachen Demonstrationen litt, die beschriebene äusserst feine Verbindung des rechten Pedunculus ist abgerissen und daher in der Figur nicht wiedergegeben. Den *zweiten* perforierten phonierenden Neugeborenen hatte die Güte mir Professor Th. KEZMARSZKY zu überlassen. Dieser Neugeborene athmete und phonierte ebenfalls nach der Operation. Das perforierende Instrument ging durch die rechte mittlere Schädelgrube und trennte mit einer theilweisen Zerstörung der rechten Temporal- und Occipitallappen und der rechten Kleinhirnhemisphäre, das Gehirn von der Medulla vollkommen ab, an jener Stelle, wo die Pedunculi mit dem Gehirne zusammenhängen. Die Figur 2 illustriert dieses Präparat. Diesen beiden Figuren füge ich zwei Abbildungen hinzu, welche sich auf zwei entsprechende Experimente beziehen und die aufbewahrten Präparate illustrieren, und in vollkommenem Einklang stehen mit jenen bei den perforierten phonierenden Neugeborenen gefundenen Verhältnissen. Die Figur 3 entspricht der Figur 1 und zeigt die Medulla eines Hundes, bei welchem das Gehirn in der Höhe der vorderen Quadrigemina vollständig durchtrennt wurde und die Phonation nicht gelitten hat. Die Figur 4 entspricht der Figur 2 und zeigt das Gehirn eines Hundes mit der

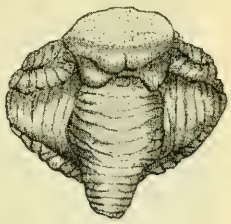


Fig. 3.
Hund. Totale Abtrennung des Grosshirns in der Höhe der vorderen Vierhügel.

vollständigen Durchtrennung des Gehirnstammes, bei welchem die Phonation ungestört blieb.

Was die hemi- und anencephal phonierenden Missgeburten betrifft, so finden wir in der Litteratur nur ARNOLD's* Beobachtung. SCHÜRHOFF** hat zwar in 8 Fällen das centrale Nervensystem hemicephaler Missgeburten untersucht, aber er macht keine Mittheilungen weder von den Lebenserscheinungen noch von der Phonation. ARNOLD's hemicephale Missgeburt lebte drei Tage. Der Stimmbildung wird nur mit wenigen Worten Erwähnung gethan. Das Kind schrie selten, sonst stöhnte es viel. Beim Auslösen der Reflexe durch Nadelstiche schrie das Kind nicht. Die Reizung der Hirntheile mit dem faradischen Strome bewirkte Contraction der Muskeln des Augenlides, des Nackens, des Gesichtes und der Muskeln der linken Extremitäten. Unter diesen, während der Reizungen angestellten Beobachtungen sind keine auf die Stimmbildung bezugnehmenden Daten enthalten. Die Untersuchung zeigte, dass Rudimente des Kleinhirnes vorhanden und die Corpora quadrigemina von einer Lamelle gebildet werden, von den Hirnnerven fehlt der N. olfactorius; der N. opticus nimmt seinen Ursprung von der vor der erwähnten Lamelle der Corpora quadrigemina gelegenen Lamelle. Das Gehirn besteht aus cystischen Hohlräumen.

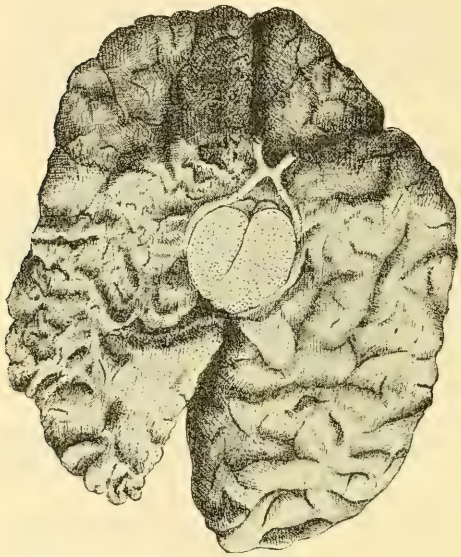


Fig. 2.

Mensch. Perforierter Neugeborener. Totale Durchtrennung des Gehirnstammes, Läsion der rechten Temporal- und Occipitallappen.

* ZIEGLER, Beiträge zur Pathologie. II.

** Bibliotheca medica. 1894.

Ein Anencephalon, welches todt geboren war, wurde von uns nicht weiter untersucht. Ein zweites Anencephalon, welches fast drei Tage lebte, überliess mir gütigst Prof. Th. KEZMARSZKY zur Untersuchung. Eine 20jährige Frau hatte diese Missgeburt geboren, in ihrer Familie sind schon mehrere Anencephalon-Geburten vorgekommen. Die Missgeburt lebte 61 Stunden und während dieser Zeit gab sie Laute von sich und weinte.

Die gut entwickelte Missgeburt zeigt am Kopfdache zwei dunkelbläulichrothe Wülste, welche in die behaarte Kopfhaut übergehen, an seiner Stelle ist ein Defect des knöchernen Schädeldaches vorhanden. Diese Wülste stehen mit dem verlängerten Marke in Verbindung. Vom centralen Nervensystem ist das Rückenmark gut ausgebildet, das verlängerte Mark und die Varolsbrücke ist entwickelt, an Stelle des Kleinhirn ist eine transparente Lamelle vorhanden, sonst ist überall ein röthliches gallertiges Gebilde bis zu den erwähnten Wülsten zu sehen.

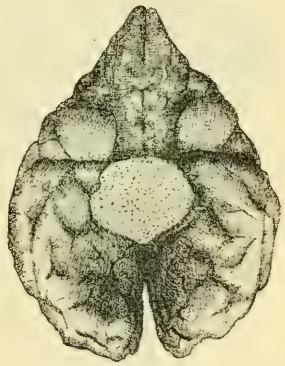


Fig. 4.
Hund. Totale Durchtrennung des Gehirnstammes.

Die Fig. 5 zeigt von hinten das centrale Nervensystem des Anencephalon, dem Sitze des Kleinhirns entsprechend ist nur eine flache bräunlich gallertartige Substanz zu sehen, welche sich nach oben stärker ausbreitet. Von vorne zeigt die Fig. 6 das centrale Nervensystem, man erkennt in Fortsetzung des Rückenmarks das verlängerte Mark und die Brücke.

Das ganze Präparat, von dem mit der Haut verbundenen Wulst bis zum Rückenmark ist mikroskopisch von Herrn Dr. VEREBÉLYI, Assistenten am pathologischen Institute, untersucht worden. Wir geben die wesentlichen Daten dieser Untersuchung, die genaue ausführliche pathologische Studie wird von ihm später veröffentlicht werden.

Am Uebergange des Rückenmarkes in das verlängerte Mark ist der geschlossene Canalis australis mit hohem Epithel zu finden, die graue Substanz ist gut entwickelt, ebenso die vorderen

Hörner, aus welchen die Wurzeln des Accessorius und der obersten Halsnerven ausgehen. Aufwärts ist der Kern des Hypoglossus, ferner des Vagus mit stark entwickelten Ganglienzellen und Wurzelfasern zu sehen. Es sind zu verfolgen die Kerne des Hypoglossus, Vagus und Glossopharyngeus und ihre Wurzelfasern, ferner die Kerne des Acusticus, Facialis und ihre Wurzelfasern. Das Dach des vierten Ventrikels wird von hohem Cylinderepithel bedeckt, welches mit einem papillären gallertartigen Gewebe verwachsen und zum Theil in der Mittellinie gespalten ist. Der Lage des Kleinhirns entsprechend ist dieses letztgenannte Gewebe zu finden. Das Corpus restiforme ist zu rudimentären kleinen Theilchen des Kleinhirnes zu verfolgen. Die Kerne des Abducens, des Trigeminus und des Oculomotorius sind zu finden.

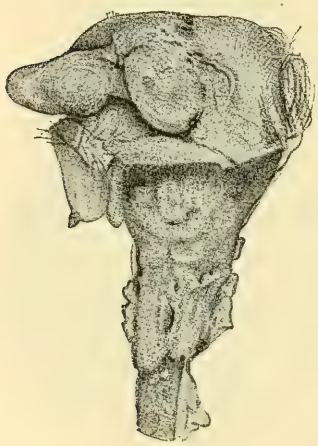


Fig. 5.

Mensch. Anencephalon. Das centrale Nervensystem vom Rückenmark bis zur Kopfhaut mit dem Wulste von hinten betrachtet.

Aufwärts sind in den erwähnten papillären gallertartigen Geweben solche Gebilde zu finden, welche ihrer Structur und ihrer anatomischen Lage entsprechend die rudimentären Theile der Corpora quadrigemina, der Thalami optici und Tracti optici zeigen. Es sind zwei aus Gliagewebe bestehende blasenartige Gebilde vorhanden, der Lage des Grosshirns entsprechend, welche von den papillären Wucherungen der weichen Hülle vielfach comprimiert und deformiert erscheinen. Der beschriebene und makroskopisch in den Figuren 5 und 6 sichtbare Wulst ist eine embryologische Aberration des die weichen Hüllen bedeckenden Fettgewebes und enthält kein Gliagewebe.

Der von ARNOLD beschriebene Fall und der von uns beobachtete Fall stellt solche Missgeburten vor, bei welchen während ihrer Lebensdauer eine entschiedene Phonation vorhanden war, und, wie die Untersuchung zeigte, der Boden des vierten Gehirnventrikels bis zu den Corpora quadrigemina ausgebildet

war. Diese zwei phonierenden Missgeburten stehen in vollem Einklang mit den von uns beschriebenen zwei phonierenden perforierten Neugeborenen, ebenso einzeln wie insgesammt entsprechen sie auch vollkommen jenen Resultaten unserer experimentellen Untersuchungen, nach welchen die Phonation möglich ist bei vollständigem Mangel des Gehirns, wenn die Gehirntheile vom Vagusgebiete bis zu den Corpora quadrigemina vorhanden sind, d. h. das von uns festgestellte Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums intact ist.

Prof. Th. KEZMARSZKY hatte die Güte mir eine Missgeburt zu überlassen, bei welcher eine Hämatomeningo-encephalocene vorhanden war. Die Missgeburt lebte einen Tag und gab Laute von sich. In dem mit Blut gefüllten Meningealsack war ein grosser Theil des Gehirns zu finden, das Kleinhirn fehlte und der vierte Gehirnventrikel war ganz offen zu sehen. Am occipitalen Theile des Schädels befindliche fluctierende Geschwulst entleert bei der Eröffnung 530 ccm blutige Flüssigkeit. In dem eröffneten Sack ist ein Theil des Grosshirnlappens zu sehen, ferner der Boden des vierten Ventrikels, welcher in Folge des vollständigen Fehlens des Kleinhirns im Sacke offen ist und mit demselben durch eine blutreiche meningeale Lamelle zusammenhängt. Am proximalen Ende des Bodens des vierten Ventrikels erscheinen zwei Höcker, zwischen welchen der Sulcus longitudinalis des vierten Ventrikels sich fortsetzt. Die Figur 7 zeigt diesen Abschnitt des Präparates. Man sieht den offen liegenden Boden des vierten Ventrikels mit den zwei proximalen Höckern, welche den Corpora quadrigemina zu entsprechen scheinen und den offen gebliebenen Aquaeductus Sylvii begrenzen. Die patho-histologische Untersuchung, welche Herr Dr. VEREBÉLYI ausführt, wird die pathologischen Veränderungen in dem Aufbau des Gehirnes näher aufklären. Für uns hat dieser Fall einer Haemato-meningo-

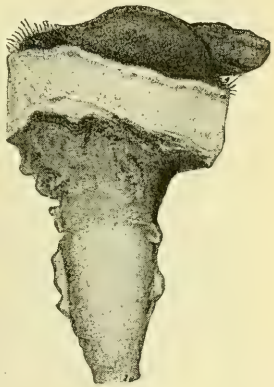


Fig. 6.

Mensch. Anencephalon. Das centrale Nervensystem vom Rückenmark bis zur Kopfhaut mit dem Wulste von vorne betrachtet.

encephalocele schon jetzt das Interesse, dass das Kleinhirn vollständig fehlte und bei dem beschriebenen Befund die Missgeburt phonierte.

Von zwei Mittheilungen habe ich Kenntniss, welche neben den Beobachtungen der Lebenserscheinungen präcise histologische Untersuchungen enthalten; in einem Falle war es ein Anencephalon, im zweiten Fall ein perforiertes Neugeborenes, welche alle beide während ihrer Lebensdauer keine Laute gaben. DARVAS* hat den vorhandenen Gehirntheil eines Anencephalon zum Gegenstande gründlicher histologischer Untersuchung gemacht. Das verlängerte Mark war bis zur gemeinschaftlichen Austrittsstelle des neunten und zehnten Hirnnervenpaares erhalten. Die Missgeburt lebte drei Tage, während dieser Zeit war jedoch nicht die geringste Spur einer Stimmbildung zu beobachten. Der zweite Fall bezieht sich auf einen perforierten Neugeborenen, an welchem KEHRER** in Bezug auf das Respirationscentrum experimentierte. Er perforierte das lebende Kind, nach Eröffnung des Schädeldaches mit einem Trepan zertrümmerte er das Gehirn und entleerte es theils durch Ausspülung, theils mit dem Kranioklasten. Der perforierte Neugeborene gab keine Laute, nahm in der Minute sechs Athemzüge, durch mechanische Reize der Handfläche und der Sohle konnten reflectorische Bewegungen der entsprechenden Extremitäten hervorgerufen werden, dagegen rief die Reizung der Haut keine Reflexe hervor. Ich habe auch brieflich die Bestätigung des Herrn Prof. KEHRER erhalten, dass keine Stimmbildung vorhanden war. Nach zehn Minuten wurde der Neugeborene zu einem physiologischen Experiment benutzt. Es fehlte „das ganze Gross- und Mittelhirn und der grösste Theil des Kleinhirns, von letzterem waren nur noch Fetzen mit den Kleinhirnschenkeln und die Varolsbrücke übrig. Dagegen war das ganze verlängerte Mark erhalten." Es wurde mit einer Scheere in der Mitte des Calamus scriptorius ein Querschnitt durch die Oblongata geführt, ohne Effect, fünf Minuten später hörte die Athmung durch einen tieferen Schnitt sofort auf. Seine eigenen Worte lauten: „Dass die

* ÓNODI, Adatok a gége beidegzéséhez. 1894.

** KEHRER, Zeitschr. f. Biologie. 1894. XXVIII Bd.

Durchschneidung der Medulla oblongata 1 cm oberhalb der Spitze des Calamus scriptorius weder die regelmässige rhythmische Brustathmung, noch die Hand- und Fussreflexe unterbricht, ja nicht einmal beide Bewegungsarten verändert. Wohl aber zeigt das

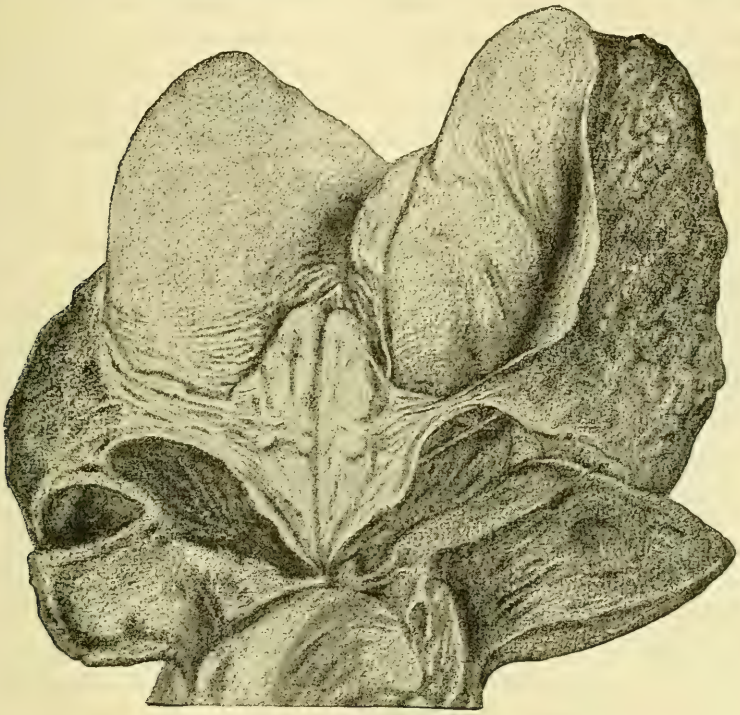


Fig. 7.

Mensch. Haemato-meningo-encephalocele. Der rhomboideale Boden des vierten Gehirnventrikels liegt offen, oberhalb desselben die vom geöffneten Sacke bedeckten Grosshirnhemisphären.

Ergebnis des zweiten gerade unter der Spitze des Calamus scriptorius gelegten Querschnitts, wonach die Athmung und die Extremitätenreflexe sofort aufhörten, dass in dem durch die beiden Schnitte isolierten unteren Endstück der Medulla oblongata entweder die classischen Athmungscentren oder doch die Wurzeln der wesentlich bei der Athmung betheiligten sensiblen oder motorischen Athmungsnerven enthalten sind. Man muss daraus folgern, dass auch beim Menschen die hauptsächlichen Athmungs-

centren an denselben Stellen liegen, wie bei den zu den Versuchen benutzten Säugethieren."

IHLBERG hat das verlängerte Mark histologisch untersucht. Der erwähnte obere Schnitt ging knapp unter jener Linie, wo die Pyramiden und die Oliven die Varolsbrücke berühren. Die ersten 30 Schnitte treffen nur mehr oder weniger die linke Hälfte. In derselben erblickt man den linken dorsalen Acusticuskern und die untersten Partien des linken Facialiskernes. Nach und nach erreichen die Schnitte auch die beiden gemeinschaftlichen sensorischen Kerne der Vagi und Glossopharyngei und die Oliven, welche Gebilde sich bis zum 172. Schnitt hinunter verfolgen lassen, wo zunächst die hinteren Theile des Querschnittes durch die zweite Operation fortfallen. Der 60. Schnitt zeigt rechts und links den obersten Theil des vorderen oder motorischen Vagus- und Glossopharyngeuskernes. Dieselben sind nach unten klar bis zum 109. Schnitt zu verfolgen; — bemerkt man vom 46. bis zum 144. Schnitte die gemeinsamen aufsteigenden Vagus- und Glossopharyngeuswurzel, GIRKE's Respirationsbündel."

Diese äusserst wichtige Beobachtung KEHRER's zeigt unzweifelhaft, dass der oberhalb des Vagusgebietes durchgeführte Schnitt des verlängerten Markes die Phonation unmöglich macht und nur die Athmung bestehen kann. Das beim Hunde von uns angegebene Phonationsgebiet war schon zum grossen Theile zerstört und wurde durch den angegebenen Schnitt vollständig eliminiert, so dass während des Experimentes und während der ganzen Lebensdauer die Phonation und ihre Möglichkeit ausgeschlossen war.

Sowohl der Fall von DARVAS wie der Fall von KEHRER stehen in vollem Einklange mit den Resultaten unserer experimentellen Untersuchungen und erklären den Ausfall der Phonation. Unsere Experimente haben gezeigt, dass die totale Durschschneidung des verlängerten Markes oberhalb des Vagusgebietes die Phonation ganz aufhebt und nur die Athmung ermöglicht. Die Figur 8 stellt das Präparat eines Hundes dar, an welchem das verlängerte Mark oberhalb des Vagusgebietes total durchschnitten wurde, worauf die Phonation aufhörte, die Athmung fortbestand, die Stimmbänder konnten sich nach innen nicht bewegen und

nur einzelne den tieferen Inspirationen entsprechende excessive abductorische Bewegungen waren zu beobachten. Unsere an Hunden ausgeführten Experimente, die in den erwähnten Arbeiten ausführlich beschrieben sind, haben zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die Zerstörung der Phonationscentren in der Gehirnrinde haben keinen Einfluss auf die Phonation.

2. Die Zerstörung der grossen Gehirnganglien, Thalamus opticus, Corpus striatum, Nucleus lentiformis beeinflusst nicht die Phonation.

3. Die totale Abtrennung des Gehirnes in der Höhe der vorderen Corpora quadrigemina stört nicht die Phonation.

4. Die Läsionen des Kleinhirns üben keinen Einfluss auf die Phonation aus.

5. Die totale Durchtrennung des verlängerten Markes oberhalb des Vagusgebietes hebt sofort die Phonation auf und ermöglicht nur die Athmung.

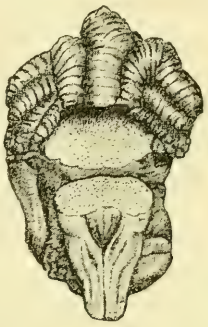


Fig. 8.

Hund. Totale Durchtrennung der Medulla oblongata oberhalb des Vagusgebietes.

Auf Grund dieser experimentellen Resultate habe ich das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums festgestellt, welches nach den Messungen der ausgeführten Experimente, jenen Theil des verlängerten Markes, des Bodens des vierten Gehirnventrikels einnimmt, welcher sich 12 mm von den hinteren Corpora quadrigemina zu dem Vagusgebiet erstreckt. Das Intactbleiben dieses subcerebralen Phonationsgebietes bei vollständiger Ausschaltung des Gehirnes ermöglicht die Phonation, während die Ausschaltung dieses Phonationsgebietes durch einen Schnitt oberhalb des Vagusgebietes die Phonation aufhebt und nur die Athmung ermöglicht und einige den tieferen Inspirationen entsprechende excessive abductorische Bewegungen der Stimmbänder.

Diese experimentellen Resultate stehen in vollkommenem Einklang mit den bei den perforierten Neugeborenen und den Missgeburten gefundenen Verhältnissen.

Bei den phonierenden perforierten Neugeborenen und bei den phonierenden hemicephalen und anencephalen Missgeburten be-

stand die Phonation neben dem Mangel des Gehirnes, weil das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums intact geblieben war. Diese Fälle entsprechen jenen Thierexperimenten, wo wir das Gehirn in der Höhe der vorderen Corpora quadrigemina von dem verlängerten Marke total abgetrennt hatten.

Bei den nur athmenden und nicht phonierenden perforierten Neugeborenen und anencephalen Missgeburten war bei Mangel des Gehirnes keine Phonation vorhanden, weil auch das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums fehlte. Diese Fälle entsprechen jenen Thierexperimenten, wo wir das Gehirn oberhalb des Vagusgebietes und unterhalb des subcerebralen Phonationsgebietes von dem verlängerten Marke total durchschnitten haben.

Ferner haben wir gesehen, dass bei den einzelnen Thierexperimenten die Läsionen des Kleinhirnes die Phonation nicht stören; dieser Thatsache entsprechen jene Fälle der erwähnten perforierten Neugeborenen und der Missgeburten, wo das Kleinhirn entweder verletzt wurde oder ganz fehlte.

Da sich unsere experimentellen Resultate in vollem Einklange befinden mit unseren auf die perforierten Neugeborenen und Missgeburten beziehenden Untersuchungen, so stellen wir den Satz auf, dass *das beim Hunde von uns festgestellte Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums, auch beim Menschen existiert und zwar in ähnlicher Weise zwischen den hinteren Corpora quadrigemina und dem Vagusgebiete.*

6.

UEBER DIE RICHTIGE UNTERSCHEIDUNG DER COLLECTIVEN UND DISPANSIVEN OPTISCHEN SYSTEME.

Von ALOIS SCHULLER,
o. ö. Prof. am kön. Josefs-Polytechnicum zu Budapest.

Vorgetragen in der Sitzung des math. phys. Vereins am 22. März 1900.

Aus „Mathematikai és Physikai Lapok" (Math. u. Physik. Blätter). Bd. IX, pp. 153—164.

1. Man beurtheilt den Charakter eines centrierten optischen Systemes kugelförmiger brechender Flächen aus dem Vorzeichen der zweiten Brennweite; je nachdem das Vorzeichen positiv oder negativ ist, schliesst man auf collective oder dispansive Eigenschaft. Diese Folgerung ist aber sowohl bei einer sehr dicken Linse, als auch bei manchen Linsensystemen unrichtig, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die zweite Brennweite (f') eines aus zwei Theilen (1. und 2.) zusammengesetzten centrierten Systemes ist bekanntlich

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{d + f_2 - f_1'}$$

wo f_1' die zweite Brennweite des, vom einfallenden Lichte getroffenen, ersten Theiles (1.), f_2 und f_2' die erste resp. zweite Brennweite des zweiten Theiles (2.) und d die Entfernung des ersten Hauptpunktes (P_2) des zweiten Theiles vom zweiten Hauptpunkte (P_1') des ersten Theiles bedeutet, wie in Fig. 1 angedeutet ist.

Bei einer einzigen Linse bedeutet d die Dicke der Linse in der Achse, und ist stets positiv.

Eine einzelne brechende Kugelfläche, sowie eine dünne Linse ist collectiv oder dispansiv, je nachdem die zweite Brennweite das positive oder negative Vorzeichen hat.

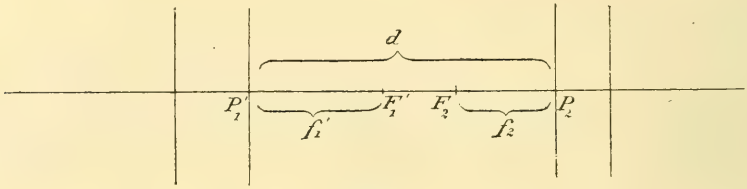


Fig. 1.

Um das Augenmerk nicht auf zweierlei Brennweiten richten zu müssen, empfiehlt es sich, f_2 aus dem bekannten Zusammenhange

$$\frac{f_2}{f_2'} = -\frac{N}{N'}$$

zu entnehmen, wodurch

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{d - \frac{N}{N'} f_2' - f_1'} = \frac{f_1' f_2'}{\frac{N}{N'} f_2' + f_1' - d}$$

wird, wobei N und N' die absoluten Brechungscoëfficienten des ersten und letzten Mediums bedeuten.

Wenn man sich einprägt, dass in der Formel nur die zweiten Brennweiten vorkommen, so kann man die Striche der f weglassen und einfach schreiben:

$$f = \frac{f_1 f_2}{\frac{N}{N'} f_2 + f_1 - d} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I.)}$$

Ist der zweite Theil des Systemes (2) von Luft umgeben, so ist $N' = N$, daher

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 + f_1 - d} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II.)}$$

Biconvexe Linse.

2. Betrachten wir vorerst eine einzige Linse mit zwei convexen Flächen, bei der bekanntlich beide Flächen collectiv sind.

Es ist dann f_1 sowohl, als auch f_2 positiv, Gleichung I findet daher unverändert Anwendung. Es ist also bei der Biconvex-Linse

$$f \gtreqless^{0}_{0} \infty, \text{ je nachdem } \frac{N}{N'} f_2 + f_1 \gtreqless d.$$

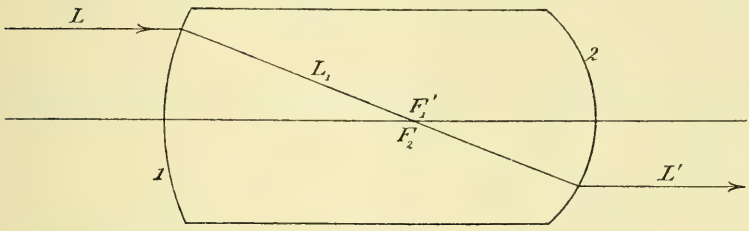


Fig. 2.

Nach der bisher üblichen Auffassung wäre also die Linse im ersten Falle eine Sammellinse, im letzten eine Zerstreuungslinse, was aber bei einer sehr dicken Linse nicht zutrifft.

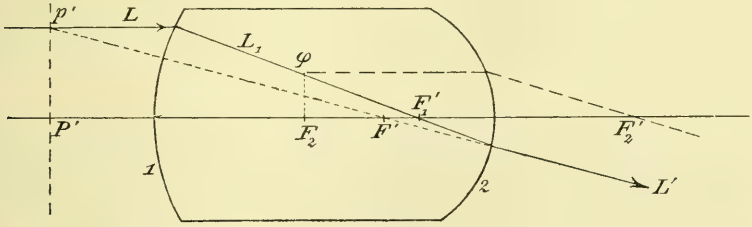


Fig. 3.

Geht man nämlich von der teleskopischen Einstellung aus

$$f = \infty \qquad d = \frac{N}{N'} f_2 + f_1,$$

bei welcher die im Inneren gelegenen Hauptbrennpunkte, (F_1' der ersten und F_2 der zweiten Fläche) zusammenfallen (Fig. 2) und nähert man die erste brechende Fläche der zweiten, ohne dass F_1' die zweite brechende Fläche erreicht, so sollte, nach dem Vorzeichen zu urtheilen, eine Sammellinse entstehen, während man thatsächlich eine Zerstreuungslinse erhält. Denn der in Fig. 3 mit y bezeichnete Gegenstand (das von der ersten Fläche ent-

worfene reelle Bild des in unendlicher Entfernung gedachten Gegenstandes) liegt jetzt innerhalb der Brennweite der zweiten Kugelfläche, diese entwirft daher ein virtuelles Bild.

Zur Bestimmung der Richtung des austretenden Strahles L' betrachten wir den Punkt φ der Brennebene (Fig. 3) und verfolgen den der Achse parallelen Strahl, der nach F_2' gebrochen wird.

Da der austretende Strahl L' mit der soeben gezogenen Richtung parallel ist, so sind die austretenden Strahlen offenbar divergent, von einem reellen Bilde kann also nicht die Rede sein. Der zweite Hauptbrennpunkt der Linse liegt in der Verlängerung von L' bei F', also nothwendig links von der zweiten brechenden Fläche, bedeutet also unbedingt einen virtuellen Brennpunkt. — Dessen ungeachtet hat die Brennweite das positive Vorzeichen. Man rechnet nämlich die zweite Brennweite f des Systems vom zweiten Hauptpunkte. Einen Punkt p' der Hauptebene liefert der Schnitt von L mit L', wodurch die Lage des zweiten Hauptpunktes P' bestimmt ist. Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, liegt F' rechts von P' (nämlich in der Richtung der Lichtausbreitung), die zweite Brennweite $f = P'F'$ hat also das positive Vorzeichen.

In dem betrachteten Falle $(\frac{N}{N'} f_2 + f_1 > d > f_1)$ liefert auch ein in endlicher Endfernung befindlicher Gegenstand bis zu einer gewissen Grenze ein virtuelles Bild. Denn während sich der Gegenstand aus unendlicher Entfernung nähert, rückt das von der ersten Kugelfläche hervorgebrachte Bild y immer näher an die zweite Kugelfläche heran. Das resultierende Bild bleibt virtuell, so lange y in das Innere der Linse fällt, es kann als reell bezeichnet werden von dem Augenblicke an, in welchem y in der zweiten brechenden Fläche erscheint, und behält diese Eigenschaft während sich der ursprüngliche Gegenstand bis zur ersten Brennebene der Linse nähert.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass der Uebertritt vom virtuellen Bilde in ein gleich gerichtetes reelles nicht über die unendliche Bildweite erfolgt, wie bei einer einfachen brechenden Fläche, sondern mit dem Verschwinden eines Schnittpunktes des

gebrochenen Strahles L_1 mit der Achse *im Inneren des Systemes* verknüpft ist.

Es ergiebt sich also aus dem soeben Gesagten, dass, obwohl in dem betrachteten Falle die zweite Brennweite positiv ist, der zweite Brennpunkt dennoch virtuell ist, und dass das Bild eines aus unendlicher Entfernung genäherten Gegenstandes anfangs virtuell, später reell erscheint, und in beiden Fällen verkehrt ist.

3. Wenden wir uns jetzt zu dem Falle, in welchem die Dicke d der Linse grösser ist als die Summe der inneren Brennweiten

$$d > \frac{N}{N'} f_2 + f_1$$

In diesem Falle erscheint das Bild y, welches die erste Kugelfläche von einem unendlich entfernten Gegenstande entwirft,

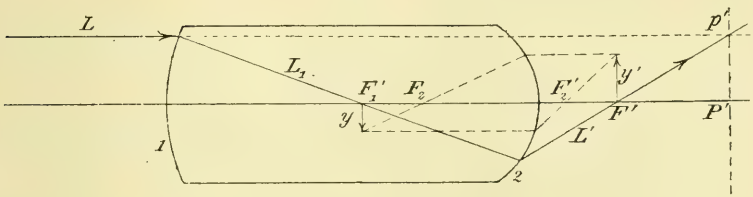


Fig. 4.

ausserhalb des ersten Brennpunktes F_2. Da die zweite Kugelfläche als collectives System wirkt, so entsteht im äusseren Raume ein reelles Bild y'. Dieses Bild erscheint in aufrechter Stellung, denn das Bild y ist verkehrt, und die zweite Kugelfläche kehrt das Bild noch einmal um. (In Fig. 4 ist der Ort des Bildes mit Hilfe der unterbrochenen Linien construiert.)

Trotzdem nun die parallel einfallenden Strahlen ein reelles Bild F'', den zweiten Brennpunkt des Systems, liefern, ist die Brennweite dennoch negativ. Denn verfolgt man den Strahl L, der im Inneren der Linse durch den Punkt F_1' und ausserhalb der Linse durch F'' geht, bis er die Verlängerung von L schneidet, so überzeugt man sich, dass der zweite Hauptbrennpunkt F'' des Systems vom zweiten Hauptpunkt P' links bleibt, dass also die Brennweite f negativ ist.

Die negative Brennweite bei aufrechtem Bilde hängt wieder

mit dem Umstande zusammen, dass die Strahlen die Achse im Innern des Systems schneiden, dass also ein reelles Bild entsteht.

In Betreff der Bilder eines Gegenstandes, der sich dem System aus unendlicher Entfernung nähert, gelten im Wesentlichen dieselben Bemerkungen, wie im vorigen Falle.

4. Tritt das Licht von der entgegengesetzten Seite in die Linse und sind die Krümmungen der beiden Kugelflächen ungleich, so ist das Verhalten der Linse im Allgemeinen verschieden; eine Sammellinse in der einen Lage kann in verkehrter Lage als Zerstreuungslinse wirken. Die Linse giebt von einem Objecte in unendlicher Entfernung in beiden Lagen ein verkehrtes reelles Bild, solange die Dicke d kleiner ist, als die kleinere der inneren Brennweiten; ebenso ist das Bild stets aufrecht und reell, solange die Dicke grösser ist, als die Summe der absoluten Werthe der inneren Brennweiten; hingegen ist die Linse bei den zwischen liegenden Werthen von d je nach der Lage collectiv oder dispansiv.

System zweier Sammellinsen.

5. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei einem aus zwei Sammellinsen bestehenden System, namentlich bei dem astronomischen Fernrohr und dem Mikroskop, und es ist in diesem Falle leichter, die Folgerungen experimentell zur Anschauung zu bringen, als bei einer einzigen sehr dicken Linse.

Rücken wir die beiden Linsen vorerst ganz aneinander, und entfernen wir sie dann stetig, so beobachtet man folgende Reihenfolge der Bilder.

Das Bild ist so lange reell und verkehrt, bis es in die äussere Fläche der zweiten Linse gelangt. Von da ab ist das Bild verkehrt und virtuell, bis die teleskopische Einstellung erreicht ist. Darüber hinaus ist das Bild des unendlich entfernten Gegenstandes stets reell und aufrecht stehend.

Im Gegensatze zu diesem Verlaufe ergiebt Formel II eine positive Brennweite, solange die teleskopische Einstellung nicht überschritten ist, das System sollte also collectiv sein; nach dem Ueberschreiten der teleskopischen Einstellung ergiebt die Formel eine negative Brennweite, das System sollte also dispansiv sein; wie gezeigt wurde, sind beide Folgerungen unrichtig.

System dreier Sammellinsen.

6. Wie schon erwähnt, entscheidet das Vorzeichen nicht, ob das System collectiv oder dispansiv ist, da es wechselt, je nachdem das Bild aufrecht oder verkehrt erscheint. Um dies in einem allgemeineren Falle zu zeigen, betrachten wir ein System von lauter Sammellinsen, welches derart zusammengestellt ist, dass jede folgende Linse das vom vorhergehenden Theile herstammende reelle Bild umkehrt, wobei jedesmal ein *reelles* Bild resultiert.

In Fig. 5 sind drei Linsen durch ihre Hauptebene angedeutet.

Verfolgen wir den Verlauf eines parallel der Achse einfallenden Strahles L. Die erste Linse giebt in der Brennebene (F')

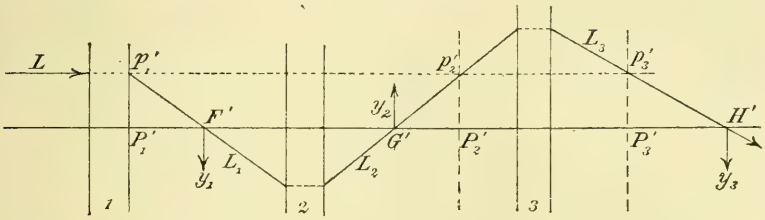


Fig. 5.

ein verkehrtes reelles Bild y_1 des unendlich entfernten Gegenstandes. Die zweite Hauptebene dieses Theiles geht durch den Schnittpunkt p_1' von L und L_1 und die Brennweite desselben $(P_1' F')$ ist positiv. — Die beiden ersten Linsen als ein System betrachtet, geben ein aufrechtes Bild y_2 in der zweiten Brennebene (G'), die zweite Hauptebene geht durch den Schnittpunkt p_2' von L mit L_2 und die Brennweite $G' P_2'$ ist negativ. — Nimmt man die dritte Linse hinzu, so kehrt sich das Bild abermals um, die Hauptebene geht dann durch p_3' und die Brennweite $P_3' H'$ erscheint wieder positiv u. s. f. Man erkennt, dass die Brennweite bei verkehrtem Bilde stets positiv, bei aufrechtem Bilde negativ ist. Da der Annahme gemäss sämmtliche Bilder reell sind, so ist klar, dass die negative Brennweite kein Kennzeichen des virtuellen Bildes und der zerstreuenden Wirkung des Systems bildet.

Convex-concave Linse.

7. Wir betrachten nun die convex-concave Linse, bei der die convexe Fläche collectiv, die concave dispansiv wirkt. Wir können diesen Fall zusammenfassen mit dem Falle, in welchem das System aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse besteht, wie bei der achromatischen Linse und dem Galilei'schen Fernrohr.

Ist der collective Theil nach vorne gerichtet, so muss man in den Formeln I und II das Vorzeichen von f_2 in das negative verwandeln, wodurch

$$f = \frac{f_1 f_2}{d + \frac{N}{N'} f_2 - f_1} \quad \text{resp.} \quad f = \frac{f_1 f_2}{d + f_2 - f_1}$$

wird. Zur Entscheidung des collectiven oder dispansiven Charakters genügt es, den Fall zweier Linsen zu betrachten, das Resultat kann unmittelbar auf die einfache Linse übertragen werden. In Betreff des Vorzeichens der Brennweite gilt:

$$f \gtreqless \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix} \text{ je nachdem } d + f_2 \gtreqless f_1.$$

Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden.

a) Im ersten Falle sei $f_2 > f_1$, was bei einem achromatischen Linsenpaar (Sammellinse) und bei einer einfachen Linse zutrifft, die in der Mitte dicker ist, als an den Rändern. Von einem sehr entfernten Gegenstande erhält man dann die folgenden Bilder.

Sind die beiden Linsen dicht neben einander, so überwiegt die Sammellinse, das System ist daher collectiv.

Entfernt man nun die Linsen von einander, so bleibt das verkehrte Bild anfangs reell, bis es die hintere Fläche der zweiten Linse erreicht. Entfernt man die Linsen noch weiter, so zeigt sich stets ein virtuelles Bild, da die Zerstreuungslinse das von der ersten Linse stammende reelle Bild stets in ein virtuelles verwandelt. — In verkehrter Lage ist das Bild immer reell. Denn das von der Zerstreuungslinse herrührende virtuelle Bild liegt schon im Falle $d = 0$ ausserhalb des Brennpunktes der Sammellinse, was umso mehr zutrifft, wenn d von Null verschieden ist.

Obige Formel liefert bei jeder Entfernung der Linsen eine positive Brennweite, man sieht also auch hier, dass das Vorzeichen der Brennweite den Charakter des Bildes nicht wiedergiebt.

b) Im zweiten Falle sei $f_1 > f_2$, was dem Galilei'schen Fernrohr sowie einer einfachen Linse entspricht, die an den Rändern dicker ist als in der Mitte.

Während die Linsen dicht an einander liegen, überwiegt die Zerstreuung. Entfernt man die Linsen von einander, so wird bei parallel einfallendem Lichte die Divergenz der austretenden Strahlen immer geringer, bis bei $d = f_1 - f_2$ die teleskopische Einstellung erfolgt. Sobald man diese überschreitet, werden die austretenden Strahlen convergent, es erscheint also ein reelles

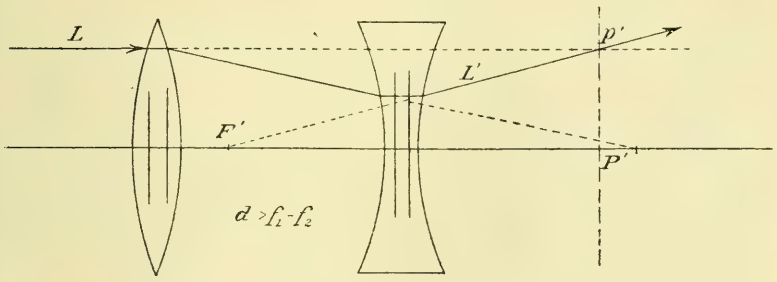


Fig. 6.

Bild. Entfernt man die Linsen noch weiter von einander, so rückt das Bild immer näher an die Zerstreuungslinse, bis es die hintere Fläche erreicht und verwandelt sich dann wieder in ein virtuelles.

In verkehrter Lage des Systems zeigt sich dieses anfangs ebenfalls als dispansiv, wird bei wachsendem d teleskopisch, und darüber hinaus beständig collectiv.

Der Unterschied, der bei der Umkehrung des Systems zur Geltung kommt, rührt von der unsymmetrischen, einseitigen Lage der Hauptebenen her, sowie auch die soeben besprochenen Veränderungen der Bilder mit dem Wandern der Hauptebenen zusammenhängen. Diesbezüglich ist in den Fig. 6 und 7 die Lage des zweiten Hauptpunktes P' und des zweiten Haupt-Brennpunktes F' angedeutet.

Indem man nebenstehende Figuren zu Rathe zieht, übersieht man leicht die folgende Veränderung. Während d von Null bis $f_1 - f_2$ wächst, liegt der zweite Hauptpunkt P' stets rechts vom System; anfangs in der Nähe des Systems gelegen, entfernt er sich bis $+\infty$. Während d den Werth $f_1 - f_2$ überschreitet, springt P' von $+\infty$ in $-\infty$, um nun von der negativen Seite

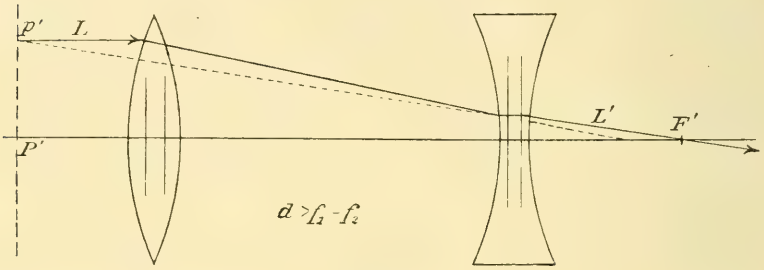


Fig. 7.

her immer näher an das System heranzutreten. Im selben Augenblicke, in dem P' von der positiven Seite auf die negative überspringt, verwandelt sich das vorher virtuelle Bild in ein reelles.

Biconcave Linse.

8. Wesentlich einfacher ist der Fall zweier Zerstreuungslinsen, sowie auch einer einzelnen Biconcav-Linse, bei der beide Flächen zerstreuend wirken. Da die einzelnen Theile von realen Gegenständen nur virtuelle Bilder geben, so kann das System ebenfalls nur dispansiv sein.

Allgemeine Regel.

9. Aus dem vorhergehenden ergiebt sich, dass die Frage, ob ein zusammengesetztes System collectiv oder dispansiv ist, nicht so einfach beantwortet werden kann, wie man bisher meinte, dass nämlich der Charakter eines Systems nicht nur von der Lage der Haupt- und Brennebenen abhängt, sondern auch von der Lage der Grenzflächen und von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes.

Es dürfte nicht leicht sein, eine die collective oder dispansive Eigenschaft bestimmende allgemeine Regel aufzustellen; einige Orientierung gewähren die folgenden Sätze.

a) Solange im Inneren des Systems nirgends ein reelles Bild entsteht, d. i. solange parallel der Achse einfallende Strahlen die Achse im Inneren des Systemes nicht schneiden, ist das System collectiv oder dispansiv, je nachdem die Brennweite positiv oder negativ ist, genau wie bei einer einzelnen brechenden Fläche.

b) Wenn hingegen im Inneren des Systemes reelle Bilder entstehen, so hängt der Charakter des Systems von demjenigen „letzten Theile" desselben ab, welcher auf das letzte jener Bilder folgt, gleichgiltig in welchem Medium dieses Bild entsteht. Das ganze System ist nur dann collectiv, wenn der „letzte Theil" als Sammellinse wirkt, und wenn überdies das letzte reelle Bild ausserhalb der ersten Brennebene dieses Theiles liegt. Abgesehen von der teleskopischen Einstellung ist das System in jedem anderen Falle dispansiv.

c) Die aufrechte oder verkehrte Stellung des resultierenden Bildes ist ebenfalls durch die Stellung des letzten reellen Bildes im Inneren bestimmt; das den austretenden Strahlen entsprechende Bild ist dem letzten reellen Bilde gleichgerichtet, wenn das ganze System zerstreuend wirkt, und es ist entgegengesetzt, wenn man es mit einem sammelnden Systeme zu thun hat.

Bemerkung in Betreff der experimentellen Demonstration.

10. Zur Herstellung von möglichst intensiven parallelen Lichtstrahlen befestigt man ein Diaphragma mit enger Oeffnung in der Nähe (3—4 cm) der negativen Kohle des Lichtbogens und verwandelt das divergente Strahlenbüschel mittelst einer Sammellinse in ein paralleles. Beobachtet man bloss in der horizontalen Ebene, so verwendet man anstatt einer kreisrunden Oeffnung einen horizontalen Spalt (0,5 bis 1 mm breit), wodurch die Lichtintensität bedeutend gesteigert wird, ohne die Schärfe der Erscheinung zu beeinträchtigen. Die aufrechte oder verkehrte Stellung der Bilder kann man dadurch zur Wahrnehmung bringen,

dass man am einen Ende des Spaltes noch eine kleine runde Oeffnung anbringt.

Das zu untersuchende System wird in die Bahn des so erhaltenen Strahlenbündels gestellt.

Man kann das Strahlenbündel dadurch sichtbar machen, dass man einen mittelgrossen Kochbecher mit einer ebenen Glasplatte lose bedeckt, durch die Ritzen ein wenig Rauch einbläst und den Becher in der Bahn der Lichtstrahlen bewegt.

7.

DESMISCHE SYSTEME.

Von L. KLUG in Klausenburg (Kolozsvár) (Ungarn).

Uebersetzt aus dem VIII. Jahrgange der „Mathematikai és Physikai Lapok“ (Math. und Physik. Blätter).

Nach STEPHANOS bilden drei Tetraeder, dessen Kanten sich zu dreien in zwölf Punkten schneiden, ein desmisches Tetraedersystem, und die drei Tetraeder, dessen Eckpunkte jene zwölf Schnittpunkte sind, bilden ein zum ersten conjugiertes desmisches Tetraedersystem. Nach STEPHANOS lassen sich solche sechs Tetraeder in der Weise durch neun Tetraeder ergänzen, dass die fünfzehn Tetraeder sich in zehn Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme spalten, von welchen irgend ein Paar die übrigen in einerlei Weise bestimmt.* Fünfzehn Tetraeder in dieser Lage wollen wir ein *vollständiges* desmisches Tetraedersystem nennen.

Nach STEPHANOS bestimmt ein desmisches Tetraedersystem ein einschaliges Hyperboloid; die drei Tetraeder des desmischen Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes sind in Bezug auf das Hyperboloid Polartetraeder. Es werden also durch ein vollständiges desmisches Tetraedersystem zehn einschalige Hyperboloide bestimmt, die man ein *vollständiges* desmisches Hyperboloidensystem nennen kann.

Zwei beliebige Hyperboloide eines vollständigen desmischen Hyperboloidensystemes schneiden sich in einem Viereck und sind in vierfacher Weise centrisch-involutorisch. Es giebt ∞^2 Hyperboloide, welche jene zwei in je einem Viereck schneiden und also

* Sur les systèmes desmiques de trois tétraèder. Bulletin des sciences mathématiques. 1879.

zu einem *einfachen* desmischen Hyperboloidensystem ergänzen. Jedes Hyperboloid eines vollständigen desmischen Hyperboloidensystemes wird von den übrigen neun in Vierecken getroffen. Insgesammt treffen sich dieselben in fünfundvierzig Vierecken; die Seiten derselben sind die Kanten desjenigen vollständigen desmischen Tetraedersystemes, welches das Hyperboloidensystem bestimmt.

Die ebenen Schnitte des vollständigen desmischen Hyperboloiden- und Tetraedersystemes bilden ein *vollständiges* desmisches Kegelschnitt- bezw. Vierseitsystem. Das *einfache* desmische Vierseitsystem besteht aus drei Vierseiten, dessen Seiten sich zu dreien in sechzehn Punkten schneiden; das *einfache* desmische Kegelschnittsystem hingegen wird von solchen drei Kegelschnitten gebildet, von welchen je zwei den dritten Kegelschnitt in vier solchen Punktpaaren treffen, dass zwei Paar dieser Treffpunkte die übrigen zwei Paare harmonisch trennen.

Wie schon STEPHANOS bemerkte, kommen im ganzen Gebilde die dual entsprechenden Configurationen $(30_6, 60_3)$, $(60_3, 30_6)$ und $(320_3, 60_{16})$, $(60_{16}, 320_3)$ vor. Die erste Configuration besteht aus 30 Geraden und 60 Punkten, die zweite aus 60 Ebenen und 30 Geraden, die dritte aus 320 Geraden und 60 Punkten, die vierte aus 60 Ebenen und 320 Geraden.

Im Folgenden wollen wir eine neue, leicht übersichtliche und ausführliche Behandlung des erwähnten Gebildes geben.

1. Das vollständige desmische Tetraeder- und Vierseitsystem.

1. Wir bezeichnen die Eckpunkte der drei Tetraeder A, B, C eines desmischen Systemes R mit

$$A_1A_2A_3A_4, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad C_1C_2C_3C_4,$$

die Eckpunkte der drei Tetraeder T_2, T_3, T_4 des conjugierten desmischen Systemes R_t mit

$$E_{12}F_{12}E_{34}F_{34}, \quad E_{13}F_{13}E_{42}F_{42}, \quad E_{14}F_{14}E_{23}F_{23}.$$

Das desmische Tetraedersystem, sowie auch das dazu conjugierte ist durch die vier Eckpunkte $A_1A_2A_3A_4$ des Tetraeders A und einen ausserhalb der Flächen desselben liegenden Eckpunkt B_1 des Tetraeders B bestimmt.

Die durch B_1 gehende und die Kante A_iA_j, sowie auch die gegenüberliegende Kante des Tetraeders A schneidende Gerade trifft A_iA_j in dem Punkte E_{ij}. Die E_{ij}, F_{ij} sind durch die Punkte A_i, A_j, die Punkte E_{1i}, E_{jk} durch die Punkte B_1, B_i, endlich die Punkte F_{1i}, F_{jk} durch die Punkte B_j, B_k harmonisch getrennt. Der Punkt C_i trennt den Punkt B_1 von dem Eckpunkte A_i und der gegenüberliegenden Seite α_i des Tetraeders harmonisch, also werden auch die Punkte E_{1i}, F_{jk} durch C_i, C_k, und die Punkte E_{jk}, F_{1i} durch C_1, C_i harmonisch getrennt. Es sind daher die folgenden Würfe

$$A_1E_{1i}A_iF_{1i}, \quad B_1E_{jk}B_iB_{1i}, \quad C_1F_{1i}C_iE_{jk}$$
$$A_jE_{jk}A_kF_{jk}, \quad B_jF_{1i}B_kF_{jk}, \quad C_jE_{1i}C_kF_{jk}$$

harmonisch.

Daraus folgt, da die Punkte A_i, B_i, C_i und die Punkte E_{1i} $F_{1i}E_{jk}F_{jk}$, als die Eckpunkte von Tetraedern, nicht in einer Ebene liegen, dass die Punktripel

$A_1B_1C_1$	$A_1B_2C_2$	$A_1B_3C_3$	$A_1B_4C_4$
$A_2B_1C_2$	$A_2B_2C_1$	$A_2B_3C_4$	$A_2B_4C_3$
$A_3B_1C_3$	$A_3B_2C_4$	$A_3B_3C_1$	$A_3B_4C_2$
$A_4B_1C_4$	$A_4B_2C_3$	$A_4B_3C_2$	$A_4B_4C_1$
$F_{34}F_{24}F_{23}$	$F_{34}E_{23}E_{24}$	$F_{24}E_{23}E_{34}$	$F_{23}E_{34}E_{24}$
$F_{34}F_{13}F_{14}$	$F_{34}E_{14}E_{13}$	$F_{13}E_{14}E_{34}$	$F_{14}E_{34}E_{13}$
$F_{12}F_{24}F_{14}$	$F_{12}E_{14}E_{24}$	$F_{21}E_{14}E_{12}$	$F_{14}E_{12}E_{24}$
$F_{12}F_{13}F_{23}$	$F_{12}E_{23}E_{13}$	$F_{13}E_{23}E_{12}$	$E_{23}E_{12}E_{13}$

in je einer Geraden liegen.

2. Die Punktpaare

$$A_1A_i \cdot E_{1i}F_{1i}; \quad A_jA_k \cdot E_{jk}F_{jk}$$
$$B_1B_i \cdot E_{1i}E_{jk}; \quad B_jB_k \cdot F_{1i}F_{jk}$$
$$C_1C_i \cdot F_{1i}E_{jk}; \quad C_jC_k \cdot E_{1i}F_{jk}$$

bestimmen auf den Gegenkanten A_1A_i, A_jA_k; B_1B_i, B_jB_k; C_1C_i, C_jC_k der Tetraeder A, B, C je eine Involution, deren Doppelpunkte $A_{1i}A_{i1}$, $A_{jk}A_{kj}$; $B_{1i}B_{i1}$, $B_{jk}B_{kj}$; $C_{1i}C_{i1}$, $C_{jk}C_{kj}$ conjugiert-imaginär sind.

Es seien nach STAUDT* die imaginären Punkte A_{1i}, B_{1i}, C_{1i}, A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} durch die harmonischen Würfe

$$A_1E_{1i}A_iF_{1i}, \quad B_1E_{jk}B_iE_{1i}, \quad C_1F_{1i}C_iE_{jk}$$
$$A_jE_{jk}A_kF_{jk}, \quad B_jF_{1i}B_kF_{jk}, \quad C_jE_{1i}C_kF_{jk}$$

und also die zu diesen conjugierten Punkte durch die harmonischen Würfe

$$A_iE_{1i}A_1F_{1i}, \quad B_iE_{jk}B_1E_{1i} \text{ etc.}$$

dargestellt.

Da die drei Tetraeder $ABC \equiv R$ 18 Kanten haben, so ist die Anzahl der obigen imaginären Doppelpunkte 36. Wir wollen dieselben im Allgemeinen mit I, und die 24 reellen Eckpunkte der sechs Tetraeder R, R_t mit R benennen.

Jede Kante der Tetraeder R trägt ein Eckpunktpaar der Tetraeder R und R_t, sowie ein Punktpaar I, und jedes dieser drei Punktpaare trennt die übrigen zwei harmonisch. Sechs Punkte auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt, welche sich in solche drei Punktpaare spalten, dass jedes desselben von den anderen harmonisch getrennt wird, bilden in sechsfacher Weise Involutionen. In solchen sechs Punkten PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 treffen z. B. die Seiten eines Polardreieckes in Bezug auf einen Kegelschnitt denselben; die conjugierten Punktpaare der Involutionen sind:

$$P_1P_2 \cdot Q_1Q_2 \cdot PQ \qquad P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 \cdot PQ$$
$$P_2P \cdot Q_2Q \cdot P_1Q_1 \qquad P_2Q \cdot PQ_2 \cdot P_1Q_1$$
$$PP_1 \cdot QQ_1 \cdot P_2Q_2 \qquad PQ_1 \cdot P_1Q \cdot P_2Q_2.$$

Je nachdem der Kegelschnitt reell oder imaginär ist, sind zwei oder sechs dieser Punkte imaginär.

3. Durch jeden der 24 Punkte R gehen sechs Paar conjugiert-imaginäre Geraden, welche je zwei Paar conjugiert-imaginäre Punkte I tragen. U. zw. gehen

durch den Punkt A_1 die Geraden $B_{1i}C_{i1}$, $B_{jk}C_{jk}$
„ „ „ B_1 „ „ $C_{1i}A_{i1}$, $C_{jk}A_{jk}$
„ „ „ C_1 „ „ $A_{1i}B_{i1}$, $A_{jk}B_{jk}$

* STAUDT, Beiträge zur Geometrie der Lage. Bd. I. Seite 76. §. 7: Imaginäre Elemente.

durch den Punkt A_i die Geraden $B_{1j}C_{ki}$, $B_{ik}C_{1j}$, $B_{1i}C_{1i}$, $B_{jk}C_{kj}$
„ „ „ B_i „ „ $C_{1j}A_{ki}$, $C_{ik}A_{1j}$, $C_{1i}A_{1i}$, $C_{jk}A_{kj}$
„ „ „ C_i „ „ $A_{1j}B_{ki}$, $A_{ik}B_{1j}$, $A_{1i}B_{1i}$, $A_{jk}B_{kj}$
„ „ „ E_{1i} „ „ $A_{1j}A_{ji}$, $B_{1j}B_{ji}$, $C_{1j}C_{k1}$, $C_{ji}C_{ik}$
„ „ „ E_{ij} „ „ $A_{1k}A_{kj}$, $A_{1i}A_{j1}$, $B_{1i}B_{ik}$, $C_{1i}C_{ki}$
„ „ „ F_{1i} „ „ $A_{1j}A_{ij}$, $B_{1j}B_{k1}$, $B_{ji}B_{ik}$, $C_{1j}C_{ji}$
„ „ „ F_{ij} „ „ $\begin{cases} A_{1i}A_{1j},\ B_{1i}B_{1j},\ C_{1i}C_{1j} \\ A_{ki}A_{kj},\ B_{ki}B_{kj},\ C_{ki}C_{kj} \end{cases}$

und die zu diesen conjugierten Geraden. So geht z. B. die Verbindungsgerade der Punkte

$$B_{1i} = B_1E_{jk}B_iE_{1i}, \quad C_{i1} = C_1E_{jk}C_iF_{1i}$$

und die Verbindungsgerade der zu diesen conjugierten Punkte durch den Schnittpunkt A_1 der reellen Geraden B_1C_1, B_iC_i, $E_{1i}F_{1i}$, und die Verbindungsgerade der Punkte

$$C_{ki} = C_kE_{1j}C_iF_{ki}, \quad C_{kj} = C_kE_{1i}C_jF_{kj},$$

sowie der zu diesen conjugierten Punkte geht durch den Schnittpunkt F_{ij} der reellen Geraden $E_{1j}E_{1i}$, C_iC_j, $F_{ki}F_{kj}$.

4. Die auf den Gegenkanten eines beliebigen der sechs Tetraeder R, R_t liegenden Punkte I sind die Eckpunkte eines imaginären Tetraeders. Im Ganzen giebt es 9 solche imaginäre Tetraeder I, deren Eckpunkte die 36 Punkte I sind. Diese 9 Tetraeder und ihre Eckpunkte sollen wie folgt bezeichnet werden:

$$I_2^a = A_{12}A_{21}A_{34}A_{43}, \quad I_2^b = B_{12}B_{21}B_{34}B_{43}, \quad I_2^c = C_{12}C_{21}C_{34}C_{43}$$
$$I_3^a = A_{13}A_{31}A_{42}A_{24}, \quad I_3^b = B_{13}B_{31}B_{42}B_{24}, \quad I_3^c = C_{13}C_{31}C_{42}C_{24}$$
$$I_4^a = A_{14}A_{41}A_{23}A_{32}, \quad I_4^b = B_{14}B_{41}B_{23}B_{32}, \quad I_4^c = C_{14}C_{41}C_{23}C_{32}.$$

Beliebige zwei der Tetraeder I bilden mit einem der sechs Tetraeder R, R_t ein einfaches desmisches Tetraedersystem. Insgesammt giebt es 20 solche einfache desmische Tetraedersysteme, die sich in 10 Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme spalten; dieselben sind

$$ABC \quad T_2T_3T_4;$$
$$AI_2^bI_2^c \quad T_2I_3^aI_4^a; \quad AI_3^bI_3^c \quad T_3I_4^aI_2^a; \quad AI_4^bI_4^c \quad T_4I_2^aI_3^a;$$
$$BI_2^cI_2^a \quad T_2I_3^bI_4^b; \quad BI_3^cI_3^a \quad T_3I_4^bI_2^b; \quad BI_4^cI_4^a \quad T_4I_2^bI_3^b;$$
$$CI_2^aI_2^b \quad T_2I_3^cI_4^c; \quad CI_3^aI_3^b \quad T_3I_4^cI_2^c; \quad CI_4^aI_4^b \quad T_4I_2^cI_3^c.$$

Jedes der 15 Tetraeder R, R_t, I kommt in vier dieser 20 Systeme vor, und jedes System enthält drei Tetraeder ($4.15 = 3.20$).

Dass die 15 Tetraeder in obigen Gruppen desmische Tetraedersysteme bilden, erhellt daraus, dass die Verbindungsgerade zweier Eckpunkte beliebiger zwei jener Tetraeder durch einen Eckpunkt des dritten geht (3.). Wir haben daher nur zu beweisen, dass die angegebenen desmischen Systeme conjugiert sind.

Man erhält die Eckpunkte der Tetraeder des dem Systeme $AI_2^b I_2^c$ conjugierten Systemes, wenn man von einem Eckpunkt des Tetraeders I_2^b, z. B. vom Eckpunkt B_{12}, zu den Gegenkanten des Tetraeders A Transversalen zieht: die Schnittpunkte dieser Transversalen mit den Gegenkanten des Tetraeders A, sowie die Punkte, welche diese von den Eckpunkten auf den Kanten des Tetraeders A harmonisch trennen, sind die Eckpunkte der Tetraeder des conjugierten Systemes.

Die durch B_{12} gehende Transversale der Gegenkanten A_1A_2, A_3A_4 trifft diese in den Punkten $E_{12}E_{34}$: denn von B_{12} geht nur eine Transversale zu A_1A_2, A_3A_4, und die ist $B_{12}B_{21} = B_1B_2 = E_{12}E_{34}$. Also ist ein Tetraeder des conjugierten Systemes $T_2 = E_{12}F_{12}E_{34}F_{34}$.

Um diese Eigenschaft auch für das Tetraeder I_3^a nachzuweisen, schreiben wir folgende 16 Punkte in der Weise hin:

$$\begin{matrix} A_1 E_{12} A_2 F_{12} \\ E_{13} B_1 E_{24} B_3 \\ A_3 E_{34} A_4 F_{34} \\ F_{13} B_2 F_{24} B_4, \end{matrix}$$

wo sowohl in den Zeilen, als auch in den Reihen der erste und dritte Punkt vom zweiten und vierten harmonisch getrennt ist.

Die von den Punkten B_{12}, B_{21} der Geraden B_1B_2 der zweiten Reihe zu den Geraden A_1A_3, A_2A_4, B_3B_4 der ersten, dritten und vierten Reihe gezogenen Transversalen treffen diese bezw. in den Punkten $A_{13}A_{31}$, $A_{24}A_{42}$, $B_{43}B_{34}$, daher ist auch $I_3^a = A_{13}A_{31}A_{42}A_{24}$ ein Tetraeder des conjugierten Systemes.

Ebenso zeigt man, wenn man oben die Zeiger 3 mit 4 vertauscht, dass auch I_4^a ein Tetraeder des conjugierten Systemes ist.

6. Wir fanden soeben, dass die Punkte $A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}$ und die Punkte $A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}$ je in einer Geraden liegen, und auf jeder derselben das erstere Punktpaar das letztere harmonisch trennt.

In Anbetracht der 16 Punkte

$$\begin{array}{l} C_4 E_{12} C_3 F_{34} \\ E_{23} B_1 E_{14} B_4 \\ C_1 E_{34} C_2 F_{12} \\ F_{14} B_2 E_{23} B_3, \end{array}$$

welche dieselbe Lage haben wie die unter 5. in quadratischer Form angeschriebenen 16 Punkte, folgt, dass die Geraden $B_{12}B_{43}$, $B_{21}B_{34}$, welche die Punkte B_{12}, B_{43}, bezw. B_{21}, B_{34} der Geraden in der zweiten und vierten Reihe verbinden, durch die Punkte C_{14}, C_{34} und C_{41}, C_{23} der Geraden der ersten und dritten Reihe gehen.

Es liegen daher die Punkte

$$\begin{array}{l} A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32} \\ A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23} \end{array}$$

auf einem conjugiert-imaginären Geradepaar II. Art*, und auf jeder Geraden wird von den ersten, mittleren, und letzten Punktpaaren ein beliebiges durch die zwei anderen harmonisch getrennt.

Es giebt sechs solche conjugiert-imaginäre Geradenpaare II. Art i, welche je sechs Paare conjugiert-imaginäre Punkte I tragen, d. h. welche von den 18 Kanten der sechs Tetraeder R stets sechs schneiden.

Diese sind

$$i_1 \begin{cases} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{21}A_{43}B_{31}B_{24}C_{41}C_{32} \end{cases} \qquad i_2 \begin{cases} A_{12}A_{43}B_{14}B_{32}C_{13}C_{24} \\ A_{21}A_{34}B_{41}B_{23}C_{31}C_{42} \end{cases}$$

$$i_3 \begin{cases} A_{13}A_{42}B_{14}B_{23}C_{12}C_{34} \\ A_{31}A_{24}B_{41}B_{32}C_{21}C_{43} \end{cases} \qquad i_4 \begin{cases} A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32} \\ A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23} \end{cases}$$

$$i_5 \begin{cases} A_{14}A_{23}B_{12}B_{34}C_{13}C_{42} \\ A_{41}A_{32}B_{21}B_{43}C_{31}C_{24} \end{cases} \qquad i_6 \begin{cases} A_{14}A_{32}B_{13}B_{24}C_{12}C_{43} \\ A_{41}A_{23}B_{31}B_{42}C_{21}C_{34}. \end{cases}$$

* Staudt, Beiträge z. G. d. L. Bd. I. Seite 77.

Die 36 Punkte I sind daher auf den 12 Geraden i in der Weise vertheilt, dass durch jeden Punkt zwei Geraden gehen und auf jeder Geraden sechs Punkte liegen ($2.36 = 6.12$).

7. Jedes der Geradenpaare i trifft drei Geradenpaare i, u. zw. trifft von den Geradenpaaren

$$\begin{matrix} i_1 & i_3 & i_5 \\ i_2 & i_4 & i_6 \end{matrix}$$

jedes diejenigen, die sich mit ihr nicht in einer Zeile befinden.

Bezeichnen wir im Allgemeinen die Geradenpaare i einer Zeile mit i_i oder i_j, i_k, die der anderen Zeile mit i_l oder i_m, i_n.

Da jedes Geradenpaar i ein Gegenkantenpaar eines Tetraeders I ist, so sind die vier Schnittpunkte $i_i i_l$ der zwei Geradenpaare i_i, i_l die Eckpunkte eines Tetraeders I. Also treffen die drei Geradenpaare der ersten Zeile, die drei Geradenpaare der zweiten Zeile in den Eckpunkten der neun Tetraeder I, wie dies folgende Tafel anzeigt:

$$\begin{matrix} I_2^a = i_1 i_2 & I_2^b = i_5 i_4 & I_2^c = i_3 i_6 \\ I_3^a = i_3 i_4 & I_3^b = i_1 i_6 & I_3^c = i_5 i_2 \\ I_4^a = i_5 i_6 & I_4^b = i_3 i_2 & I_4^c = i_1 i_4. \end{matrix}$$

Aus dieser Tafel folgt, dass je zwei sich nicht schneidende Geradenpaare i_i, i_j; i_l, i_m die Kanten von vier Tetraedern I sind, nämlich von $i_i i_l$, $i_i i_m$, $i_j i_l$, $i_j i_m$. Die Tetraederpaare $i_i i_l$, $i_j i_m$ oder $i_i i_m$, $i_j i_l$ bilden mit demjenigen Tetraeder R oder R_t ein desmisches System, dessen Gegenkanten die reellen Kanten der Tetraederpaare $i_i i_m$, $i_j i_l$, bezw. $i_i i_l$, $i_j i_m$ sind; und alle sechs Tetraeder bilden ein conjugiertes desmisches System. Das dritte Gegenkantenpaar der Tetraeder R und R_t ist das reelle Kantenpaar der Tetraeder $i_k i_n$; d. h. die Gegenkanten der Tetraeder R oder R_t sind die reellen Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Geradenpaare $i_i i_l$, $i_j i_m$, $i_k i_n$.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann man leicht laut folgendem Schema die zehn Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme (unter 4) aufschreiben.

	i_1		i_3		i_5		i_1
i_2	I_2^a		I_4^b		I_3^c		I_4^a
		AT_4		BT_3		CT_2	
i_4	I_4^c		I_3^a		I_2^b		I_4^c
		CT_3		AT_2		BT_4	
i_6	I_3^b		I_2^c		I_4^a		I_3^b
		BT_2		CT_1		AT_3	
i_2	I_2^a		I_4^b		I_3^c		I_4^a

Wir bemerken noch, dass die Eckpunkte jedes der Tetraeder I die Schnittpunkte der damit in einer Reihe und Zeile befindlichen Geradenpaare i sind; ferner, dass vier Tetraeder I, welche in zwei Nachbarreihen und Nachbarzeilen sind, die von diesen Reihen und Zeilen eingeschlossenen Tetraeder R, R_t zu einem conjugierten desmischen System ergänzen.

8. Wir wollen die bisherigen Untersuchungen in folgenden Satz zusammenfassen:

Bezeichnet man die 18 Kanten der sechs reellen Tetraeder eines reellen conjugierten desmischen Tetraedersystemes mit r, die 24 Eckpunkte mit R, die 18 Paare conjugiert-imaginäre Punkte, welche die Eckpunktpaare dieser Tetraeder auf den einzelnen Kanten harmonisch trennen, mit I, so liegen diese 36 Punkte I je sechs auf sechs conjugiert-imaginären Geradenpaaren II. Art i, und es spalten sich sowohl auf den Geraden i, wie auch auf den Geraden r die sechs Punkte R, I in solche drei Paare, von welchen je zwei durch das dritte harmonisch getrennt sind, d. h. die sechs Punkte liegen stets sechsfach involutorisch. Die 30 Geraden (r, i) und die 60 Punkte (R, I) bilden daher eine Configuration $(30_6, 60_3)$.

Die 30 Geraden und 60 Punkte sind die Kanten und die Eckpunkte von 15 Tetraedern, nämlich von den sechs angenommenen reellen und von neun imaginären Tetraedern. Die 15 Tetraeder spalten sich in 10 Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme, von diesen ist eines das Angenommene, dessen Tetraeder alle reell sind,

während die übrigen 18 Systeme aus je einem reellen und zwei imaginären Tetraedern bestehen, und jedes der Tetraeder in vier Systemen vorkommt.

Die 60 Punkte als Eckpunkte von 20 desmischen Tetraedersystemen liegen in der Weise zu dreien auf 32 reellen Geraden und 144 Paaren conjugiert-imaginären Geraden I. Art, dass durch jeden reellen Punkt 4 reelle und 12 imaginäre, und durch jeden imaginären Punkt 16 imaginäre Gerade gehen. Es bilden daher diese Gerade und Punkte eine Configuration $(320_3, 60_{16})$.

Vertauscht man in diesem Satze die Punkte mit Ebenen, so erhält man einen neuen Satz, welcher sich auf die Seiten und Kanten der 15 Tetraeder bezieht. Laut diesem Satz lässt sich das Gebilde, welches man erhält, wenn man das vollständige desmische Tetraedersystem durch eine Ebene schneidet, also charakterisieren:

Der ebene Schnitt eines vollständigen desmischen Tetraedersystemes ist ein vollständiges desmisches Vierseitsystem, welches aus 6 reellen und 9 imaginären Vierseiten besteht. Diese 15 Vierseite haben 18 reelle und 6 Paar conjugiert-imaginäre, also nur 30 Eckpunkte, ferner 24 reelle und 16 Paar conjugiert-imaginäre Seiten. Durch jeden Eckpunkt gehen drei Seitenpaare, von welchen je zwei durch das dritte harmonisch getrennt sind, so dass das Gebilde eine Configuration $(60_3, 30_6)$ *ist.*

Die 15 Vierseite spalten sich 20mal zu dreien in Vierseite, deren 12 Seiten sich zu dreien in 16 Punkten schneiden, und die man als ein einfaches desmisches Vierseitensystem bezeichnen kann. Zu jedem der einfachen desmischen Vierseitsysteme ist ein anderes conjugiert, dessen Vierseite nämlich mit dem ersteren dieselben 12 Eckpunkte gemeinsam haben. Von den zehn Paar (einfachen) conjugierten desmischen Vierseitsystemen besteht eines aus sechs reellen Vierseiten, während in den übrigen neun zwei Vierseite reell die übrigen vier imaginär sind.

Die 60 Seiten der 10 Paar conjugierten desmischen Vierseitsysteme, und die 320 Punkte, in welche dieselben sich zu dreien schneiden, bilden eine Configuration: $(60_{16}, 320_3)$.

2. Das vollständige desmische Hyperboloiden- und Kegelschnittsystem.

9. Die Kanten des Tetraeders A sind die Seiten von drei Vierecken

$$A_1A_4A_2A_3, \quad A_1A_2A_3A_4, \quad A_1A_3A_4A_2.$$

Durch die Seiten dieser Vierecke und durch den Punkt B_1 gehen bezw. drei Hyperboloide c_2, c_3, c_4. Je zwei dieser Hyperboloide schneiden sich in einem Gegenkantenpaar des Tetraeders A, und haben also noch zwei gemeinsame Geraden, welche die Gegenkanten B_1B_i, B_jB_k des Tetraeders B sind. Es gehen daher jene Hyperboloide auch durch die Seiten der Vierecke

$$B_1B_4B_2B_3, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad B_1B_3B_4B_2.$$

In ähnlicher Weise kann man schliessen, dass die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} B_1B_4B_2B_3 & C_1C_4C_2C_3 \\ B_1B_2B_3B_4 & C_1C_2C_3C_4 \\ B_1B_3B_4B_2 & C_1C_3C_4C_2 \end{array}$$

auf den Hyperboloiden a_2, a_3, a_4 und die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} C_1C_4C_2C_3 & A_1A_4A_2A_3 \\ C_1C_2C_3C_4 & A_1A_2A_3A_4 \\ C_1C_3C_4C_2 & A_1A_3A_4A_2 \end{array}$$

auf den Hyperboloiden b_2, b_3, b_4 liegen.

Nachdem die Kanten der Tetraeder $R \equiv ABC$ zugleich die Kanten der Tetraeder $R_t \equiv T_2T_3T_4$ sind, so gehen jene Hyperboloide auch durch die Seiten jener Vierecke, welche aus den Kanten von je zwei dieser Tetraeder gebildet werden können.

So gehen z. B. die Hyperboloide a_2, b_2, c_2 bezw. durch die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} E_{13}E_{24}F_{13}F_{24} & E_{14}E_{23}F_{14}F_{23} \\ E_{13}F_{24}E_{24}F_{13} & E_{14}F_{23}E_{23}F_{14} \\ E_{13}F_{13}F_{24}E_{24} & E_{14}F_{14}F_{23}E_{23}. \end{array}$$

Von drei Hyperboloiden, welche durch je vier Gegenkanten, also insgesammt durch alle Kanten von zwei Tetraedern gehen, wollen wir sagen, dass sie ein *einfaches desmisches Hyperboloidensystem bilden.*

Die in den Zeilen und Reihen der Tafel

(h)	T_3T_4	T_4T_2	T_2T_3
BC	a_2	a_3	a_4
CA	b_2	b_3	b_4
AB	c_2	c_3	c_4

befindlichen Hyperboloide bilden nach dem Obigen einfache desmische Systeme.

10. Aus den angeschriebenen Vierecken des früheren (9.) Punktes ist ersichtlich, dass

die Gegenkanten A_1A_2, A_3A_4 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare b_3c_4 sind,

„ „ B_1B_3, B_4B_2 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare c_4a_2 sind,

„ „ C_1C_4, C_2C_3 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare a_2b_3 sind.

Diese Hyperboloidenpaare haben aber noch ein gemeinsames Geradenpaar, nämlich:

$$i_1 \left| \begin{matrix} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{21}A_{43}B_{31}B_{24}C_{41}C_{32} \end{matrix} \right.$$

In ähnlicher Weise schliesst man, dass

i_1 ein gemeinsames Geradenpaar der Hyperboloide $a_2b_3c_4$ ist,

i_2 „ „ „ „ „ $a_2b_4c_3$ „

i_3 „ „ „ „ „ $a_3b_4c_2$ „

i_4 „ „ „ „ „ $a_3b_2c_4$ „

i_5 „ „ „ „ „ $a_4b_2c_3$ „

i_6 „ „ „ „ „ $a_4b_3c_2$ „.

Die Geradenpaare $i_1 \ldots . i_6$ liegen selbst auch auf einem Hyperboloid h, da $i_1i_3i_5$ von $i_2i_4i_6$ geschnitten werden.

Durch die vier Schnittpunkte der Geradenpaare i_1i_2, i_3i_4, i_5i_6 gehen noch bezw. die Geradenpaare A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_4A_2; A_1A_4, A_2A_3; diese sind daher reciproke Polaren und daher das Tetraeder A ein Polartetraeder in Bezug auf das Hyperboloid h.

In ähnlicher Weise folgt, dass B, C, T_2, T_3, T_4 Polartetraeder

sind in Bezug auf h, da z. B. die Gegenkanten der Tetraeder B, T_2 durch die Schnittpunkte der Geradenpaare

$$i_1 i_6,\ i_3 i_2,\ i_5 i_4, \text{ bezw. } i_1 i_2,\ i_3 i_6,\ i_5 i_4$$

gehen.

Die sechs Tetraeder des angenommenen conjugierten desmischen Tetraedersystemes sind daher Polartetraeder in Bezug auf das Hyperboloid h.

11. Bestimmen wir jetzt die Hyperboloide, welche durch die Gegenkantenpaare der Tetraeder der übrigen neun conjugierten desmischen Systeme des vollständigen desmischen Tetraedersystemes gehen. Zu dem Ende wollen wir übersichtlich aufschreiben, in welcher Weise die 30 Geraden $(r,\ i)$ zu zweimal-sechs auf den zehn Hyperboloiden $a_2,\ a_3 \ldots c_4,\ h$ liegen. Dies ist aus umstehender Tafel ersichtlich. (S. folg. Seite.)

In den zehn Quadraten dieser Tafel sind die Punkte in der Weise geordnet, dass sowohl die in den Zeilen wie auch die in den Reihen befindlichen auf je einer Erzeugenden des oberhalb des Quadrats geschriebenen Hyperboloids liegen.

Aus dieser Tafel kann man leicht die folgende aufschreiben, die anzeigt, welche der zehn Hyperboloide $a_2 a_3 \ldots h$ zu vieren gemeinsame Geradenpaare haben. Es gehen nämlich

die	Hyperboloide	$b_3 c_3 b_4 c_4$	durch	das	Geradenpaar	$A_1 A_2,$	$A_3 A_4$
„	„	$b_4 c_4 b_2 c_2$	„	„	„	$A_1 A_3,$	$A_4 A_2$
„	„	$b_2 c_2 b_3 c_3$	„	„	„	$A_1 A_4,$	$A_2 A_3$
„	„	$c_3 a_3 c_4 a_4$	„	„	„	$B_1 B_2,$	$B_3 B_4$
„	„	$c_4 a_4 c_2 a_2$	„	„	„	$B_1 B_3,$	$B_4 B_2$
„	„	$c_2 a_2 c_3 a_3$	„	„	„	$B_1 B_4,$	$B_2 B_3$
„	„	$a_3 b_3 a_4 b_4$	„	„	„	$C_1 C_2,$	$C_3 C_4$
„	„	$a_4 b_4 a_2 b_2$	„	„	„	$C_1 C_3,$	$C_4 C_2$
„	„	$a_2 b_2 a_3 b_3$	„	„	„	$C_1 C_4,$	$C_2 C_3$
„	„	$h\ a_2 b_3 c_4$	„	„	„	i_1	
„	„	$h\ a_2 b_4 c_3$	„	„	„	i_2	
„	„	$h\ a_3 b_4 c_2$	„	„	„	i_3	
„	„	$h\ a_3 b_2 c_4$	„	„	„	i_4	
„	„	$h\ a_4 b_2 c_3$	„	„	„	i_5	
„	„	$h\ a_4 b_3 c_2$	„	„	„	i_6	

$$h$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{i_2} & \multicolumn{2}{c}{i_6} & \multicolumn{2}{c}{i_4} \end{array} \\
i_1 \left\{ \begin{array}{l} A_{12} A_{34} B_{13} B_{42} C_{14} C_{23} \\ A_{43} A_{21} B_{24} B_{31} C_{32} C_{41} \end{array} \right. & \\
i_3 \left\{ \begin{array}{l} B_{14} B_{32} C_{12} C_{34} A_{13} A_{42} \\ B_{32} B_{41} C_{43} C_{21} A_{24} A_{13} \end{array} \right. & \\
i_5 \left\{ \begin{array}{l} C_{13} C_{42} A_{14} A_{23} B_{12} B_{34} \\ C_{24} C_{31} A_{32} A_{41} B_{43} B_{24} \end{array} \right. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{a_2} \\
B_1 & E_{14} & B_4 & E_{23} & B_{14} & B_{41} \\
E_{24} & C_3 & F_{13} & C_1 & C_{13} & C_{31} \\
B_3 & F_{23} & B_2 & F_{14} & B_{32} & B_{23} \\
E_{13} & C_2 & F_{24} & C_4 & C_{24} & C_{42} \\
B_{13} & C_{23} & B_{42} & C_{14} & A_{12} & A_{34} \\
B_{31} & C_{32} & B_{24} & C_{41} & A_{43} & A_{21}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{a_3} \\
B_1 & E_{12} & B_2 & E_{34} & B_{12} & B_{21} \\
E_{23} & C_4 & F_{14} & C_1 & C_{14} & C_{41} \\
B_4 & F_{34} & B_3 & F_{12} & B_{43} & B_{34} \\
E_{14} & C_3 & F_{23} & C_2 & C_{32} & C_{23} \\
B_{14} & C_{34} & B_{23} & C_{12} & A_{13} & A_{42} \\
B_{41} & C_{43} & B_{32} & C_{21} & A_{24} & A_{13}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{a_4} \\
B_1 & E_{13} & B_3 & E_{24} & B_{13} & B_{31} \\
E_{34} & C_2 & F_{12} & C_1 & C_{12} & C_{21} \\
B_2 & F_{24} & B_4 & F_{13} & B_{24} & B_{42} \\
E_{12} & C_4 & F_{34} & C_3 & C_{43} & C_{34} \\
B_{12} & C_{42} & B_{34} & C_{13} & A_{14} & A_{23} \\
B_{21} & C_{24} & B_{43} & C_{31} & A_{32} & A_{41}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{b_2} \\
C_2 & E_{23} & C_4 & F_{14} & C_{14} & C_{41} \\
F_{13} & A_3 & E_{13} & A_1 & A_{13} & A_{31} \\
C_3 & F_{23} & C_2 & E_{14} & C_{32} & C_{23} \\
E_{24} & A_2 & F_{24} & A_4 & A_{24} & A_{42} \\
C_{13} & A_{23} & C_{42} & A_{14} & B_{12} & B_{34} \\
C_{31} & A_{32} & C_{24} & A_{41} & B_{43} & B_{21}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{b_3} \\
C_1 & E_{34} & C_2 & F_{12} & C_{12} & C_{21} \\
F_{14} & A_4 & F_{14} & A_1 & A_{14} & A_{41} \\
C_4 & F_{34} & C_3 & E_{12} & C_{43} & C_{34} \\
E_{23} & A_3 & F_{23} & A_2 & A_{32} & A_{23} \\
C_{14} & A_{34} & C_{23} & A_{12} & B_{13} & B_{42} \\
C_{41} & A_{43} & C_{32} & A_{21} & B_{24} & B_{31}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{b_4} \\
C_1 & E_{24} & C_3 & F_{13} & C_{13} & C_{31} \\
F_{12} & A_2 & E_{14} & A_1 & A_{12} & A_{21} \\
C_2 & F_{24} & C_2 & E_{13} & C_{42} & C_{24} \\
E_{34} & A_4 & F_{34} & A_3 & A_{43} & A_{34} \\
C_{12} & A_{42} & C_{34} & A_{13} & B_{14} & B_{23} \\
C_{21} & A_{24} & C_{43} & A_{31} & B_{32} & B_{41}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{c_2} \\
A_1 & F_{14} & A_4 & E_{14} & A_{14} & A_{41} \\
E_{13} & B_3 & E_{24} & B_1 & B_{13} & B_{31} \\
A_3 & F_{23} & A_2 & E_{23} & A_{32} & A_{23} \\
F_{13} & B_2 & F_{24} & B_4 & B_{24} & B_{42} \\
A_{13} & B_{23} & A_{42} & B_{14} & C_{12} & C_{34} \\
A_{31} & B_{32} & A_{24} & B_{41} & C_{43} & C_{21}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{c_3} \\
A_1 & F_{12} & A_2 & E_{14} & A_{12} & A_{21} \\
E_{14} & B_4 & E_{23} & B_1 & B_{14} & B_{41} \\
A_4 & E_{34} & A_3 & F_{34} & A_{43} & A_{34} \\
F_{14} & B_3 & F_{23} & B_2 & B_{32} & B_{23} \\
A_{14} & B_{34} & A_{23} & B_{12} & C_{13} & C_{42} \\
A_{41} & B_{42} & A_{32} & B_{21} & C_{24} & C_{31}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{c_4} \\
A_1 & F_{13} & A_3 & E_{13} & A_{13} & A_{31} \\
E_{12} & B_2 & E_{34} & B_1 & B_{12} & B_{21} \\
A_2 & F_{24} & A_4 & E_{24} & A_{42} & A_{24} \\
F_{12} & B_4 & F_{34} & B_3 & B_{43} & B_{34} \\
A_{12} & B_{42} & A_{34} & B_{13} & C_{14} & C_{23} \\
A_{21} & B_{24} & A_{43} & B_{31} & C_{32} & C_{41}
\end{array}$$

Aus dem Umstande, dass sich die 15 Geradenpaare (r, i) in Hinsicht der 10 Hyperboloide $a_2 a_3 \ldots h$ in gleicher Weise verhalten, kann man wie oben (9.) schliessen, dass die sechs Tetraeder des 1., 2., ... 10. conjugierten desmischen Systemes (unter 4) Polartetraeder sind in Bezug auf die Hyperboloide $h a_2 a_3 a_4 b_2 b_3 b_4 c_2 c_3 c_4$.

Die neun zu den neuen desmischen Tetraedersystemen gehörigen Tafeln (wie unter 9.) sind die folgenden:

(a_2)	$I_3^a I_4^a$	$I_4^a T_2$	$I_3^a T_2$
$A I_2^b$	b_2	c_3	c_4
$A I_2^c$	c_2	b_3	b_4
$I_2^b I_2^c$	h	a_4	a_3

(a_3)	$I_4^a I_2^a$	$I_5^a T_3$	$I_4^a T_3$
$A I_3^b$	b_3	c_4	c_2
$A I_3^c$	c_3	b_4	b_2
$I_3^b I_3^c$	h	a_2	a_4

(a_4)	$I_2^a I_3^a$	$I_3^a T_4$	$I_2^a T_4$
$A I_4^b$	b_4	c_2	c_3
$A I_4^b$	c_4	b_2	b_3
$I_4^b I_4^c$	h	a_3	a_2

(b_2)	$I_3^b I_4^b$	$I_4^b T_2$	$I_3^b T_2$
$B I_2^c$	c_2	a_3	a_4
$B I_2^a$	a_2	c_3	b_4
$I_2^c I_2^a$	h	b_4	b_3

(b_3)	$I_4^b I_2^b$	$I_2^b T_3$	$I_4^b T_3$
$B I_3^c$	c_3	a_4	a_2
$B I_3^a$	a_3	c_4	c_2
$I_3^c I_3^a$	h	b_2	b_4

(b_4)	$I_2^b I_3^b$	$I_3^b T_4$	$I_2^b T_4$
$B I_4^c$	c_4	a_2	a_3
$B I_4^a$	a_4	c_2	c_3
$I_4^c I_4^a$	h	b_3	b_2

(c_2)	$I_3^c I_4^c$	$I_4^c T_2$	$I_3^c T_2$
$C I_2^a$	a_2	b_3	b_4
$C I_2^b$	b_2	a_3	a_4
$I_2^a I_2^b$	h	c_4	c_3

(c_3)	$I_4^c I_2^c$	$I_2^c T_3$	$I_5^c T_3$
$C I_3^a$	a_3	b_4	b_2
$C I_3^b$	b_3	a_4	a_2
$I_3^a I_3^b$	h	c_2	c_4

(c_4)	$I_2^c I_3^c$	$I_3^c T_4$	$I_2^c T_4$
$C I_4^a$	a_4	b_2	b_3
$C I_4^b$	b_4	a_2	a_3
$I_4^a I_4^b$	h	c_2	c_2

In jeder Tafel sind die in der ersten Zeile befindlichen Hyperboloide diejenigen, in Bezug auf welche die Tetraeder der nämlichen Tafel Polartetraeder sind.

Diese sechs Tetraeder einer Tafel bilden ein conjugiertes desmisches Tetraedersystem, zu welchem dieses Hyperboloid *zugeordnet* genannt werden soll.

12. Bevor wir noch die Resultate dieser Untersuchungen in einem Satz zusammenfassen, wollen wir noch zwei Fragen beantworten. Die erste wäre, ob die Fläche h reell oder imaginär ist?

Da sämmtliche Gegenkanten der Polartetraeder R und R_t in Bezug auf h, h in conjugiert-imaginären Punkten treffen, so ist h

eine imaginäre Fläche II. Ordnung. Während also das dem reellen desmischen Tetraedersysteme zugeordnete Hyperboloid imaginär ist, sind die den imaginären desmischen Tetraedersystemen zugeordneten Hyperboloide reell.

13. Die zweite der zu beantwortenden Fragen ist: ob im Allgemeinen zwei Hyperboloide, die sich in einem Viereck schneiden, einem einfachen desmischen Hyperboloidensysteme angehören können?

Wir nehmen ein Hyperboloid b_2' an, welches c_2 in dem Viereck $A_1A_4A_2A_3$ schneidet. Die zwei Hyperboloide b_2', c_2 sind in vierfacher Weise centrisch-collinear; die Collineationscentren sind die Eckpunkte des Viereckes, und die Collineationsebenen gehen durch die übrigen drei Eckpunkte desselben. Es haben nämlich die Hyperboloide b_2', c_2 im Eckpunkte A_i eine gemeinsame Tangentialebene, die durch zwei Seiten des Viereckes geht; die Ebene durch die übrigen zwei Seiten des Viereckes sei α_i. Ist C_i' ein beliebiger Punkt des Hyperboloids b_2', so fällt das Hyperboloid b_2^*, welches durch C_i' gehend mit c_2 in Bezug auf den Punkt A_i und die Ebene α_i centrisch-collinear ist, mit b_2 zusammen. Daraus folgt, dass die durch den Punkt A_i gezogenen Geraden die Hyperboloide b_2', c_2 und die Ebene α_i in projectiven Punktwürfen treffen.

Es treffe nun eine durch den Punkt A_1 gezogene Gerade die Hyperboloide b_2', c_2 in den Punkten C_1', B_1, und es seien die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden $C_1'C_4'$, $C_1'C_3'$; B_1B_4, B_1B_3; ferner bezeichnen wir mit $C_2'C_3'$, $C_2'C_4'$; B_2B_3, B_2B_4 diejenigen Erzeugenden der Hyperboloide, welche jene von den Gegenseiten des Viereckes $A_1A_4A_3A_2$ harmonisch trennen.

Die Schnittpunkte der Seiten der Vierecke $C_1'C_4'C_2'C_3'$, $B_1B_4B_2B_3$ mit den Seiten des Viereckes $A_1A_4A_2A_3$ sind wie allhier ersichtlich

$$\begin{array}{llll} A_1 & E_{14}' & A_4 & F_{14}' \\ F_{13}' & C_3' & E_{24}' & C_1' \\ A_4 & F_{23}' & A_2 & E_{23}' \\ E_{13}' & C_2' & F_{24}' & C_4' \end{array} \qquad \begin{array}{llll} A_1 & E_{14} & A_4 & F_{14} \\ F_{13} & B_4 & F_{24} & B_2 \\ A_3 & E_{23} & A_2 & F_{23} \\ E_{13} & B_1 & E_{24} & B_3, \end{array}$$

wo die Punkte in den Zeilen und Reihen harmonische Würfe bilden.

Mit Rücksicht auf die Hyperboloide b_2', c_2 ist

$$A_2A_3(A_1B_1A_4C_1') \barwedge A_1A_4(A_1E_{14}A_4F_{14}'),$$

woraus in Hinblick auf jene Schnittpunkte folgt, dass die Punkte E_{ij}', F_{ij}' nur dann mit den Punkten E_{ij}, F_{ij} coincidieren, wenn der Ebenewurf $A_2A_3(A_1B_1A_4C_4')$ harmonisch ist, d. h. wenn die Hyperboloide b_2', c_2 centrisch-involutorisch liegen. Nachdem in diesem Falle die Punkte

$$\begin{array}{cccc} B_1 & E_{14} & B_4 & E_{23} \\ E_{24} & C_3' & F_{13} & C_1' \\ B_3 & F_{23} & B_2 & F_{14} \\ E_{13} & C_2' & F_{24} & C_4' \end{array}$$

in den Zeilen und Reihen harmonische Würfe bilden: so liegen auch die Vierecke $B_1B_4B_2B_3$, $C_1'C_4'C_2'C_3'$ auf einem Hyperboloid a_2', und die Hyperboloide a_2', b_2', c_2 bilden ein desmisches System.

Daraus folgt, dass man zwei, sich in einem Viereck schneidende Hyperboloide, im Allgemeinen durch kein Hyperboloid zu einem desmischen Systeme ergänzen kann, d. h. es giebt kein Hyperboloid, welches jene in Vierecken schneidet. Liegen aber die zwei angenommenen Hyperboloide in vierfacher Weise centrisch-involutorisch, dann kann man dieselben durch ∞^2 Hyperboloide zu desmischen Systeme ergänzen.

14. Die Resultate der bisherigen Untersuchungen sind:

Durch die sich in acht Punkten schneidenden Gegenkanten der Tetraederpaare eines einfachen desmischen Tetraedersystemes gehen drei Hyperboloide, welche ein einfaches desmisches System bilden. Je zwei dieser Hyperboloide sind in Bezug auf die Eckpunkte und die Ebenen durch die anderen Eckpunkte ihres gemeinsamen Viereckes centrisch-involutorisch. Das einfache desmische Tetraedersystem bestimmt in dieser Weise neun Hyperboloide, die sich in sechs desmische Systeme spalten, und ausser diesen noch ein Hyperboloid, in Bezug auf welches sowohl die drei Tetraeder des Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes Polartetraeder sind, und welches Hyperboloid als dem conjugierten desmischen Tetraedersysteme zugeordnet bezeichnet werden soll.

Diese zehn Hyperboloide, von welchen neun reell und eines imaginär ist, haben folgende Eigenschaften:

1. Jedes derselben trifft die übrigen neun in Vierecken;

2. einzeln sind sie denjenigen zehn conjugierten desmischen Tetraedersystemen zugeordnet, welche das angenommene einfache Tetraedersystem zu einem vollständigen desmischen Systeme ergänzen,

3. sie spalten sich in 60-erlei Weise in einfache desmische Hyperboloidensysteme; jedes Hyperboloid kommt in 18 Systemen vor,

4. sie haben 15-mal zu vieren zwei gemeinsame Erzeugende.

15. Wenn wir das vollständige desmische Tetraedersystem sowie das zugeordnete Hyperboloidensystem mit einer Ebene schneiden, so besteht die Schnittfigur aus 15 Vierseiten und 10 Kegelschnitten. Die Vierseite bilden ein vollständiges desmisches Vierseitsystem, die Kegelschnitte ein *vollständisches desmisches Kegelschnittsystem*, und es ergiebt sich (aus 14) folgender Satz:

Durch je acht auf acht Geraden liegende Eckpunkte der Vierseitpaare eines einfachen desmischen Vierseitsystems gehen drei Kegelschnitte, welche ein einfaches desmisches System bilden. Jeder dieser Kegelschnitte wird von den zwei anderen in acht Punkten getroffen, welche zwei harmonische Punktwürfe bilden.

Das einfache desmische Vierseitsystem bestimmt in dieser Weise neun Kegelschnitte, die sich in sechs desmische Systeme spalten, und ausser diesen noch einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen sowohl die drei Vierseite des Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes Polarvierseite sind, und welcher Kegelschnitt, als dem conjugierten desmischen Vierseitsysteme zugeordnet genannt werden soll.

Diese zehn Kegelschnitte, von welchen neun reell und einer imaginär ist, haben folgende Eigenschaften:

1. Dieselben sind denjenigen zehn conjugierten desmischen Vierseitsystemen zugeordnet, welche das angenommene einfache Vierseitsystem zu einem vollständigen desmischen Vierseitsystem ergänzen.

2. Sie spalten sich in 60-erlei Weise in einfache desmische Kegelschnittsysteme; jeder Kegelschnitt kommt in 18 Systemen vor.

3. Sie gehen 15mal zu vieren durch zwei gemeinsame Punkte.

8.

DIE VERTHEILUNG DES NIEDERSCHLAGES NACH TAGESZEITEN.

Von J. HEGYFOKY,
kath. Pfarrer in Turkeve (Ungarn).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 13. März 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Math. u. Naturw. Anzeiger) Bd. XVII pp. 490—509.

Die tägliche Periode des Niederschlages ist noch nicht gehörig aufgeklärt. Dass man es hier mit einem sehr verwickelten Phänomen zu thun hat, geht schon aus den Daten hervor, welche die Lehrbücher von SPRUNG und BEBBER aufweisen. Die tägliche Periode lässt zwei, drei, ja sogar vier Maxima und ebenso viele Minima erkennen, die aber auch noch jahreszeitliche Verschiedenheiten darthun.

Die publicierten Daten über stündliche Niederschlagsmengen sind nicht nur von geringer Anzahl, sondern auch meistens von kurzer Dauer. Das kann aber auch nicht Wunder nehmen; sind doch die registrierenden Instrumente erst neueren Datums und ist die Bearbeitung der Autogramme eine sehr lästige Beschäftigung. Eben deshalb verfügen wir bis zur Zeit auch über keine Zusammenstellung der Ergebnisse stündlicher Regenaufzeichnungen. HELLMANN sammelte zwar dies bezügliche Daten und schickte sich (1889) an, dieselben zu publicieren, jedoch, wie er vom 23. Jan. 1899 schreibt, ist seine Abhandlung noch immer nicht gedruckt.

Über die tägliche Periode des Niederschlages in Ungarn ist bis jetzt nichts bekannt gemacht, weil selbstregistrierende Regenmesser erst zu Ende des Jahres 1899 an einigen Stationen aufgestellt wurden. Unbekannt ist uns auch die tageszeitliche Vertheilung; wir wissen nicht einmal, ob mehr Niederschlag Vormittag, Nachmittag oder in der Nacht fällt. Zu Ó-Gyalla und Budapest wird zwar an den drei Terminstunden auch der Niederschlag gemessen, weil aber die Daten von kurzer Dauer und theils unpubliziert sind, so werde ich mich bloss an jene Angaben halten, welche meinen Aufzeichnungen entstammen, die ich in *Tardos*, $13^1/_2$ Monate (December 1887—15. Jan. 1889), in *Bánhorváth* $32^1/_2$ Monate (Febr. 1889—15. Oct. 1891), und in *Turkeve* 86 Monate (Nov. 1891—1898) hindurch sammelte. Meine 11jährigen (132 Monate) Beobachtungen wurden theils in der Mitte der grossen Tiefebene (Turkeve), theils am nördlichen Saume derselben (Tardos), theils unweit derselben zwischen Bergen (Bánhorváth) angestellt. Der Niederschlag wurde um 7a., 2p. und 9p. gemessen.

Die folgende Tabelle I macht uns mit der Summe des Niederschlages Vormittags (7a.—2p.), Nachmittags (2p.—9p.) und Nachts (9p.—7a.) bekannt. Ausser der jahreszeitlichen Menge theile ich auch jene für den Frühling und Sommer, für den Herbst und Winter separat mit, weil je zwei Jahreszeiten gemeinsame Züge aufweisen.

Die Daten der Tabelle I können nur bezüglich der zwei Tageszeiten 7a.—2p., 2p.—9p. verglichen werden. Wie zu sehen, ist die Menge des Niederschlages im Herbst und Winter zu diesen zwei Tageszeiten bei allen drei Stationen ziemlich gleich gross; nicht so im Frühling und Sommer, wo Nachmittag viel mehr Niederschlag fällt, als Vormittag. Die Jahressumme weist auch eine grössere Menge Nachmittag, als Vormittag auf. *Im Herbst und Winter vertheilt sich der Niederschlag Vormittag und Nachmittag ziemlich gleichförmig, im Frühling und Sommer aber sehr ungleichförmig. Nachmittags fällt fast noch einmal soviel Regen, als am Vormittag.*

Damit man auch den Niederschlag während der Nacht (9p.—7a.) mit dem der zwei anderen Tageszeiten vergleichen

Tabelle I.

Niederschlagssumme in Mm.

	Tardos Dec. 1887—15. Jan. 1889				Bánhorváth Febr. 1889—15. Oct. 1891				Turkeve 1892—1898				Alle drei Stationen 11 Jahre*			
	Stunde				Stunde				Stunde				Stunde			
	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7
Winter	58.9	62.0	75.1	196.0	39.9	38.7	57.0	135.6	237.3	208.3	267.8	713.4	344.5	318.8	404.2	1067.5
Frühling	25.6	67.5	35.1	128.2	129.3	202.4	162.6	494.3	289.6	550.8	466.5	1306.9	444.5	820.7	664.2	1929.4
Sommer	63.4	75.5	117.5	256.4	131.6	262.6	234.4	628.6	283.3	558.6	427.6	1269.5	487.3	896.7	779.5	2154.5
Herbst	30.4	37.8	48.0	116.2	88.0	78.9	152.6	319.5	290.4	294.1	408.1	992.6	425.3	432.7	628.4	1486.4
Frühling } Sommer	89.0	143.0	152.6	384.6	260.9	465.0	397.0	1122.9	572.9	1109.4	894.1	2576.4	922.8	1717.4	1443.7	4083.9
Herbst } Winter	89.3	99.8	123.1	312.2	127.9	117.6	209.6	455.1	527.7	502.1	675.9	1706.0	769.8	751.5	1032.6	2553.9
Jahr	178.3	242.8	275.7	696.8	388.8	582.6	606.6	1578.0	1100.6	1611.8	1570.0	4282.4	1692.6	2468.9	2476.3	6637.8

* Hier sind die Mengen für Turkeve aus 1891, Nov., Dec. beigezählt.

könne, drücken wir denselben in Percenten der Summe aus. Bei gleichförmiger Vertheilung müsste der Vormittag (7a.—2p.) und Nachmittag (2p.—9p.) **29**, die Nacht (9p.—7a.) **42** % der Menge aufweisen. Die folgende Tabelle II giebt zu erkennen, ob eine Tageszeit mehr (+) oder weniger (—) aufweist, als sie bei gleichförmiger Vertheilung aufweisen sollte.

Tabelle II.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Tardos 13½ Monat			Bánhorváth 32½ Monat			Turkeve 84 Monate (7 Jahre)			Alle 3 Stationen 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7
Winter	1	3	— 4	0	0	0	4	0	— 4	3	1	— 4
Frühling	— 9	24	— 15	— 3	12	— 9	— 7	13	— 6	— 6	14	— 8
Sommer	— 5	1	4	— 8	13	— 5	— 7	15	— 8	— 7	13	— 6
Herbst	— 3	4	— 1	— 2	— 4	6	0	1	— 1	0	0	0
Frühling | Sommer	— 6	8	— 2	— 6	13	— 7	— 7	14	— 7	— 6	13	— 7
Herbst | Winter	0	3	— 3	— 1	— 3	4	2	0	— 2	1	0	1
Jahr	— 4	6	— 2	— 4	8	— 4	— 3	8	— 5	— 3	8	— 5

Wie Tabelle II zu erkennen giebt, fiel an den 3 Stationen im Jahre *um 8 % mehr* Regen Nachmittag (2p.—9p.), als laut gleichförmiger Vertheilung fallen sollte.

Dass die tageszeitliche Vertheilung sich so gestaltet, daran sind die wärmeren Monate Schuld. *Im Frühling und Sommer fällt Nachmittag um 13 % mehr Regen, als bei gleichförmiger Vertheilung fallen würde.* Im Herbst und Winter ist die Vertheilung an allen drei Tageszeiten sozusagen fast ganz gleichförmig.

Laut den 7jährigen Beobachtungen zu Turkeve kann als wahrscheinlich angenommen werden, *dass der Niederschlag im Herbst über den ganzen Tag fast vollkommen gleichmässig vertheilt ist; im Winter fällt etwas mehr Vormittags, als Nachts; im Frühling und Sommer erreicht die Menge Nachmittags das Dreifache jener Vormittags und Nachts.* Die anderen zwei Stationen geben

wegen der kürzeren Beobachtungszeit noch kein so bestimmtes Resultat.

Niederschläge bringen meistens barometrische Depressionen. Weil aber die Vertheilung derselben im Frühling und Sommer eine andere ist, als im Herbst und Winter, müssen auch noch andere Ursachen wirken, welche in den erstgenannten zwei Jahreszeiten Nachmittags eine Vermehrung der Regenmenge herbeiführen. *Die Hauptursache davon muss in dem aufsteigenden Luftstrom gesucht werden, welcher sich in den wärmeren Monaten Nachmittags am kräftigsten entwickelt.* Aufsteigend erkaltet derselbe und scheidet Wasser aus, verursacht also den Regen.

Am Nachmittag entstehen die meisten Gewitter. Auch bei dieser Erscheinung spielt der aufsteigende Luftstrom die Hauptrolle. Gewitter und Niederschlag gehen Hand in Hand. Sehen wir nun, wieviel Regen wir zur Zeit der Gewitter bekommen. Als Gewitterregen bezeichne ich jene Menge, welche zu jener Tageszeit fiel, in welcher Donner oder wenigstens Wetterleuchten wahrzunehmen war. Die Menge wurde in % ausgedrückt und auf die gleichförmige Vertheilung per Tageszeit (29, resp. 42 %) bezogen.

Tabelle III.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Ohne Gewitter						Mit Gewitter (☈, ↯)					
	Turkeve 86 Monate			Alle 3 Stationen 11 Jahre			Turkeve 86 Monate			Alle 3 Stationen 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7
Winter . .	4	0	— 4	3	1	— 4	—	—	—	—	—	—
Frühling . .	— 1	1	0	— 2	3	— 1	— 19	38	— 19	— 14	35	— 21
Sommer . .	4	— 2	— 2	0	— 4	4	— 16	30	— 14	— 13	27	— 14
Herbst . . .	4	— 6	2	3	— 4	1	— 27	45	— 18	— 25	30	— 5
Jahr . . .	3	— 2	— 1	1	— 1	0	— 18	34	— 16	— 15	30	— 15

Die tageszeitliche Vertheilung des Niederschlages ist zur Zeit ohne Gewitter so ziemlich gleichförmig nicht nur im Winter, sondern auch in den übrigen Jahreszeiten. *Treten aber Gewitter*

auf, dann fällt Nachmittags (2p.—9p.) 27—45 % mehr Regen, als bei gleichförmiger Vertheilung fallen sollte. Das nachmittägige Regenmaximum ist also mit dem Maximum der Gewitterfrequenz enge verknüpft.

Nachdem wir mit der Vertheilung der Niederschlagsmenge nach den drei Tageszeiten uns bekannt gemacht haben, betrachten wir nun auch die *Häufigkeit* derselben und untersuchen, ob es Vormittags, Nachmittags oder in der Nacht häufiger regnete.

In Tabelle IV werden nicht die Fälle selbst, sondern die Abweichung derselben von den auf die drei Tageszeiten entfallenden Percenten (29, 29, 42 %) angeführt. Bemerkt sei, dass in der Spalte aller drei Stationen auch die Beobachtungen zu Turkeve im Monate Nov. und Dec. 1891 inbegriffen sind.

Im Frühling und Sommer regnete es am häufigsten Nachmittags (2p.—9p.); im Herbst und Winter weisen die drei Tageszeiten keine so namhafte Differenzen auf. Laut dem Mittel der drei Stationen regnete es im Frühling und Sommer Nachmittags unter 100 in 6 Fällen häufiger, als es hätte regnen sollen; in der Nacht und Vormittag aber ebensoviel seltener. *Nicht nur mehr, sondern auch häufiger fällt Regen in der wärmeren Jahreszeit Nachmittags, als in den übrigen Tagesstunden.*

Tabelle III belehrt uns darüber, dass an Gewittertagen Nachmittags besonders viel Regen fällt, und Tabelle IV giebt zu erkennen, dass es zu jener Zeit auch sehr häufig regnet. *Mit dem Nachmittagsmaximum der Gewitter stellt sich auch das Maximum der Regenmenge und Regenhäufigkeit ein.*

Die Niederschlagsdichtigkeit einer Tageszeit stellt sich folgendermaassen heraus:

	Stunde		
	7—2	2—9	9—7
Im Allgemeinen . . . Mm.	2.53	3.11	2.42
An Gewittertagen . . . „	3.55	5.47	4.63
Verhältniss . . . . . „	1.40	1.76	1.91

Die Dichtigkeit ist verhältnissmässig am grössten in Gewitternächten.

Tabelle IV.

Abweichung der Niederschlagshäufigkeit von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Tardos Dec. 1887 bis 15. Jan. 1889			Bánhorváth Febr. 1889 bis 15. Oct. 1891			Turkeve 1892—1898			Alle 3 Stationen 11 Jahre			Alle 3 Stationen an Gewittertagen (☈, ☇); 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7
Winter	—	—	—	2	4	— 6	2	— 1	— 1	0	0	0	—	—	—
Frühling	—	—	—	— 2	7	— 5	— 5	4	1	— 4	5	1	— 8	23	— 15
Sommer	—	—	—	— 1	6	— 5	0	6	— 6	0	6	— 6	— 7	22	— 15
Herbst	—	—	—	— 2	2	0	— 5	0	5	— 5	1	4	— 23	28	— 5
Frühling / Sommer	2	7	— 9	— 2	6	— 4	— 3	5	— 2	— 2	6	— 4	—	—	—
Herbst / Winter	2	— 1	— 1	— 1	3	— 2	— 1	— 1	2	— 2	0	2	—	—	—
Jahr	2	3	— 5	— 1	5	— 4	— 2	2	0	— 2	3	— 1	— 9	23	— 14

Zum Vergleich meiner Beobachtungen sei es gestattet, jene von Berlin aus der deutschen Ebene anzuführen. (Meteor. Zeitschr. 1897, p. 211.)

Tabelle V.

Niederschlag in Berlin (1885—1896).

	Summe in Mm.				Abweichung von der gleichförmigen Vertheilung in %.		
	Stunde				Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7
Winter . . .	199.1	196.1	318.9	714.1	— 1	— 2	3
Frühling . . .	254.1	440.7	446.6	1141.4	— 7	10	— 3
Somme . . .	498.2	871.8	599.0	1969.0	— 4	15	— 11
Herbst . . .	339.2	427.3	569.6	1336.1	— 4	3	1
Frühling } Sommer } . .	752.3	1312.5	1045.6	3110.4	— 5	13	— 8
Herbst } Winter } . . .	538.3	623.4	888.5	2050.2	— 3	2	1
Jahr	1290.6	1935.9	1934.1	5160.6	— 4	9	— 5

Wie auf der ungarischen, fällt auch auf der deutschen Ebene im Frühling und Sommer der meiste Regen Nachmittags, in den anderen zwei Jahreszeiten ist die Vertheilung des Niederschlages zu allen drei Tageszeiten ziemlich gleichförmig. Die Wirkung des aufsteigenden Luftstromes ist hier wie dort die gleiche.

Im Anschluss an die mitgetheilten Daten mag ein Versuch gemacht werden, eine Zusammenstellung einiger mir zugänglichen, stündlichen Aufzeichnungen zu geben. Jedoch nicht die stündliche Regenmenge selbst soll dargethan werden, weil auch eine 22jährige, ausgeglichene Serie von New York die tägliche Periode noch nicht ganz regelmässig darstellt, sondern jene 6—6stündlicher Intervalle. Wie vordem, soll auch jetzt die Abweichung eines 6stündigen Intervalles von der gleichförmigen (25 %) Vertheilung in Percenten angegeben werden; ebenso die eines 12stündigen von 50 %. Nach Thunlichkeit sind die Intervalle so gewählt, dass das nachmittägige der Tageszeit 2p.—9p. möglichst nahe zu stehen kommt. Tabelle VI enthält die so berechneten Daten.

In der Spalte „Anmerkung" bedeutet M. Z. den Jahrgang und die Seite der Meteorologischen Zeitschrift.

Tabelle VI.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	Anmerkung
1. Zechen . . .	1857/71	Dec.—Febr.	15	109	0	+ 2	— 1	— 1	+ 1	— 1	M. Z. 1876, p. 23.
		März—Mai		118	— 4	— 4	+ 7	+ 1	+ 3	— 3	
		Juni—Aug.		222	— 5	— 3	+ 9	— 1	+ 6	— 6	
		Sept.—Nov.		103	+ 1	— 2	+ 1	0	— 1	+ 1	
		Jahr		551	— 3	— 2	+ 5	0	+ 3	— 3	
2. Berlin	1885/96	Dec.—Febr.	12	60	+ 4	— 2	— 2	0	— 4	+ 4	M. Z. 1897, p. 211.
		März—Mai		95	— 2	— 6	+ 9	— 1	+ 3	— 3	
		Juni—Aug.		164	— 8	— 2	+ 16	— 6	+ 14	— 14	
		Sept.—Nov.		111	0	— 3	+ 2	+ 1	— 1	+ 1	
		Jahr		430	— 3	— 3	+ 8	— 2	+ 5	— 5	
3. Prag	1850/69	Dec.—Febr.	20	59	— 1	+ 1	+ 3	— 3	+ 4	— 4	M. Z. 1882, p. 246.
		März—Mai		97	— 6	— 2	+ 9	— 1	+ 7	— 7	
		Juni—Aug.		173	— 8	— 3	+ 10	+ 1	+ 7	— 7	
		Sept.—Nov.		18	— 2	+ 3	— 1	0	+ 2	— 2	
		Jahr		409	— 5	— 1	+ 6	0	+ 5	— 5	
4. Hohenheim .	1883/93	Apr.—Sept.	10	—	— 5	— 4	+ 8	+ 1	+ 4	— 4	M. Z. 1894, p. 391.
		Jahr		—	— 4	— 4	+ 8	0	+ 4	— 4	
5. Wien	1853/56	Apr.—Oct.	4	283	— 5	— 1	+ 8	— 2	+ 7	— 7	M. Z. 1876, p. 23. Hann. Täg. Gang. e. m. Elem., p. 17.
6. Klagenfurt .	1886/88	Mai—Sept.	3	556	— 1	— 2	+ 2	+ 1	0	0	M. Z. 1889, p. 229.
7. Basel	1888/93	Jahr	6	541	0	— 2	+ 2	0	0	0	M. Z. 1894, p. 419.
8. Modena . . .	?	Jahr	?	—	0	0	+ 4	— 4	+ 4	— 4	M. Z. 1882, p. 54.
9. Pawlowsk .	1878/79	Apr.—Sept.	2	256	+ 2	— 2	+ 4	— 4	+ 2	— 2	M. Z. 1882, p. 54.

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	Anmerkung
10. New-York .	1870/76	Oct.—März	7	505	+ 1	+ 2	0	— 3	+ 2	— 2	M. Z. 1882, p. 236.
		Apr.—Sept.		619	— 1	— 2	+ 4	— 1	+ 2	— 2	
		Jahr		1124	0	— 1	+ 2	— 1	+ 1	— 1	
	1870/91	Jahr	22	1097	0	— 1	+ 2	— 1	+ 1	— 1	M. Z. 1892, p. 480.
11. Washington	{1874/78 / 1880 91}	Jahr	18.7	947	— 2	0	+ 4	— 2	+ 4	— 4	M. Z. 1892, p. 480.
12. Calcutta . .	?	Nov.—Febr.	7	56	— 6	— 15	+ 22	— 1	+ 7	— 7	M. Z. 1889, p. 111.
		März—Mai		172	— 19	— 13	+ 26	+ 6	+ 13	— 13	
		Juni—Oct.		1116	— 2	+ 4	+ 9	— 11	+ 13	— 13	
		Jahr		1344	— 4	+ 1	+ 11	— 8	+ 12	— 12	
13. Simla . . .	1843/45	Nov.—Febr.	3	161	— 7	+ 23	— 4	— 12	+ 19	— 19	M. Z. 1889, p. 111.
		März—Mai		183	— 5	— 2	+ 18	— 11	+ 16	— 16	Die Stunden sind $2\frac{1}{2}$ a.—$8\frac{1}{2}$ a. und so weiter.
		Juni—Oct.		1893	+ 1	+ 2	+ 5	— 8	+ 7	— 7	
		Jahr		2237	0	+ 3	+ 6	— 9	+ 9	— 9	
14. Batavia . .	1866/82	Dec.—Febr	17	875	+ 1	— 3	— 1	+ 3	— 4	+ 4	M. Z. 1886, p. 146.
		März—Mai		391	— 13	— 4	+ 17	0	+ 13	— 13	
		Juni—Sept.		275	— 16	— 11	+ 25	+ 2	+ 14	— 14	
		Oct.—Nov.		208	— 18	— 3	+ 32	— 11	+ 29	— 29	
		Jahr		1749	— 7	— 4	+ 11	0	+ 7	— 7	
	1866/90	Jan.—Febr.	25	—	+ 5	— 5	— 4	+ 4	— 9	+ 9	M. Z. 1893, p. 356.
		Juni—Juli		—	— 15	— 13	+ 29	— 1	+ 16	— 16	
		Jahr		—	— 6	— 5	+ 11	0	+ 6	— 6	
15. Alexandria	1891	Jahr	1	555	— 1	0	+ 4	— 3	+ 4	— 4	M. Z. 1893, p. 40.
16. S. Paulo (RioJaneiro)	1893/96	Jahr	4	1223	— 10	— 7	+ 18	— 1	+ 11	— 11	M. Z. 1898, p. 70.
17. Botucatu (RioJaneiro)	1894/96	Jahr	3	1177	— 9	— 3	+ 14	— 2	+ 11	— 11	M. Z. 1898, p. 71.
18. Ben Nevis.	?	Dec.—Febr.	9	—	+ 15	— 2	— 12	+ 1	— 14	+ 16	M. Z. 1892, p. 470.
		März—Mai	8	—	+ 24	— 12	+ 15	— 28	+ 3	— 4	Abweichung vom Tagesmittel in %; nicht gleichbedeutend mit den anderen Daten der Tabelle.
		Juni—Aug.		—	— 1	0	+ 39	— 38	+ 39	— 39	
		Sept.—Nov.		—	— 9	+ 9	— 8	+ 10	— 1	— 1	

					3a.—9a.	9a.—3p.	3p.—9p.	9p.—3a.	9a.—9p.	9p.—9a.	
19. Perpignan .	1884/94	Jahr	11	—	— 1	0	+ 4	— 3	+ 4	— 4	M. Z. 1896, p. 26.
					8a.—2p.	2p.—10p.	10p.—8a.				
20. Utrecht . .	1849/88	Dec.—Febr.	40	155	— 2	+ 4	— 2	—	—	—	M. Z. 1890, (p. 17.)
		März—Mai		234	0	+ 4	— 4	—	—	—	Gleichm. Vertheil.:
		Juni—Aug.		249	0	+ 5	— 5	—	—	—	8 a.—2 p. = 25 %
		Sept.—Nov.		194	— 1	+ 4	— 3	—	—	—	2 p.—10 p. = 33 %
		Jahr		832	— 1	+ 4	— 3	—	—	—	10 p.—8 a. = 42 %.
					7a.—2p.	2p.—7p.	7p.—7a				
21. Paramaribo	1833/34	Jahr	2	5136	— 6	+ 24	— 18	—	—	—	Sprung, Lehrb. d. Meteor., p. 358. Gleichm. Verth.: 7–2 = 29 %; 2-7=21 %; 7-7=50 %.
					7a.—2p.	2p.—9p.	9p.—7a.				
22. Vivia. Congo	?	Jahr	?	—	— 13	+ 14	— 1	—	—	—	Ibidem. Gleichm. Verth.: 7—2 = 29 %; 2-9=29 %; 9-7=42 %.
									Tag	Nacht	
23. Singapore .	1841/43	Dec.—Febr.	3	.711	—	—	—	—	+ 33	— 33	M. Z. 1898, p. 476.
		März—Mai		567	—	—	—	—	+ 24	— 24	
		Juni—Aug.		480	—	—	—	—	+ 8	— 8	
		Sept.—Nov.		789	—	—	—	—	+ 11	— 11	
		Jahr		2547	—	—	—	—	+ 19	— 19	
					2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	
24. Wien . . .	1881, 83/88	Apr.—Sept.	7	454	— 4	— 5	+ 4	+ 5	— 1	+ 1	M. Z. 1889, p. 221.
25. Bern	?	Jahr	8	—	— 0	— 4	— 1	+ 5	— 5	+ 5	M. Z. 1882, p. 54.
26. Aachen . .	1895/96	Oct.—März	2	529	— 6	— 1	+ 3	+ 4	+ 2	— 2	M. Z. 1897, p. 383.
		Apr.—Sept.		502	— 3	— 9	+ 4	+ 8	— 5	+ 5	
		Jahr		1031	— 4	— 6	+ 4	+ 6	— 2	+ 2	

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2 a.—8 a.	8 a.—2 p.	2 p.—8 p.	8 p.—2 a.	8 a.—8 p.	8 p.—8 a.	Anmerkung
27. Triest . . .	Juni 1894	Dec.—Febr.	3	186	— 3	— 4	+ 3	+ 4	— 1	+ 1	Mazelle. Tägl. Periode der Niederschl. in Triest, p. 3.
	bis	März—Mai		268	+ 2	0	— 3	+ 1	— 3	+ 3	
	Juni 1897	Juni—Aug.		289	— 2	— 10	— 3	+ 15	— 13	+ 13	
		Sept.—Nov.		277	— 3	+ 3	— 5	+ 5	— 2	+ 2	
		Jahr		1020	— 1	— 3	— 2	+ 6	— 5	+ 5	
28. Coimbra . .	1876/80	Oct.—März	5	689	+ 2	— 2	+ 2	— 2	— 0	0	M. Z. 1882, p. 54.
		Apr.—Sept.		385	+ 3	— 2	— 2	+ 1	— 4	+ 4	
		Jahr		1074	+ 2	— 2	0	0	— 2	+ 2	
29. Greenwich .	1861/66	Oct.—März	6	160	+ 2	0	— 1	— 1	— 1	+ 1	M. Z. 1892, p. 236.
		Apr.—Sept.		203	+ 4	— 6	+ 2	0	— 4	+ 4	
		Jahr		363	+ 3	— 3	— 1	— 1	— 2	+ 2	
30. Hongkong .	1884/88	Dec.—Febr.	5	178	+ 2	— 6	— 4	+ 8	— 10	+ 10	M. Z. 1889, p. 351.
		März—Mai		507	+ 1	+ 9	— 5	— 5	+ 4	— 4	
		Juni—Aug.		1189	+ 8	+ 4	— 6	— 6	— 2	+ 2	
		Sept.—Nov.		291	+ 1	— 1	+ 1	— 1	0	0	
		Jahr		2165	+ 5	+ 4	— 5	— 4	— 1	+ 1	
	1884/93	Nov.—Febr.	10	135	+ 5	— 5	— 6	+ 6	— 11	+ 11	M. Z. 1895, p. 192.
		März, Sept. / Apr., Oct.		626	+ 4	+ 3	— 5	— 2	— 2	+ 2	
		Mai—Aug.		1566	+ 7	+ 8	— 7	— 8	+ 1	— 1	
		Jahr		2327	+ 6	+ 5	— 6	— 5	— 1	+ 1	
31. Mauritius .	1888/96	Je ein Monat	9	115	+ 3	0	— 2	— 1	— 2	+ 2	M. Z. 1898, p. 192.
32. Cordoba . . (Argentina)	1888/90	Oct.—März	2.4	1869	+ 9	— 6	— 4	+ 1	— 10	+ 10	M. Z. 1892, p. 34.
		Apr.—Sept.		208	+ 26	— 17	— 2	— 7	— 19	+ 19	
		Jahr		2077	+ 11	— 7	— 4	0	— 11	+ 11	
					2a.-6a.	6a.-10a.	10a.-2p.	2p.-6p.	6p.-10p.	10p.-2a.	6a.-6p.	6p.-6a.	
33. Lissabon . .	1856/65	Dec.—Febr.	10	292	+ 3	+ 4	— 1	— 2	— 2	— 2	+ 1	— 1	M. Z. 1888, p. 84. Bei gleichmässiger Vertheilung fallen auf je ein Intervall 17 %.
		März—Mai		203	+ 3	+ 1	— 4	+ 2	— 3	+ 1	— 1	+ 1	
		Juni—Aug.		33	+ 5	+ 5	— 5	— 5	+ 1	— 1	— 5	+ 5	
		Sept.—Nov.		292	+ 3	— 2	— 5	+ 2	0	+ 2	— 5	+ 5	
		Jahr		820	+ 4	+ 1	— 4	0	— 1	0	— 3	+ 3	
34. Neu Guinea	Meistens 2—2 Jahre			3010	Konstantinhafen, Fr. Wilhelmshafen, Erima, Stephansort (4 Stationen) .						— 34	+ 34	Hann. Klimatologie II., p. 250.
				5030	Sattelberg						— 6	+ 6	
				1870	Herbertshöhe						+ 8	— 8	

Die Niederschlagsmenge konnte auf Tabelle VI nicht überall für jede Station angeführt werden, weil dieselbe hier und da nicht mitgetheilt wurde. Man findet theils die Regenmenge in Pariser Zoll oder Mm. angegeben, theils aber nur die Percente der einzelnen Stunden; hier wird die Beobachtungszeit, dort nur die Zahl der Jahre bekannt gemacht, oder auch diese nicht. Die 2jährige Menge in Paramaribo ist sehr hoch; laut 26jährigen Aufzeichnungen beträgt dieselbe 2227 Mm.* Die Daten für Perpignan und Lissabon sind nicht stundenweise mitgetheilt, mithin konnten dieselben auch nicht so gruppiert werden, als das Material der anderen Stationen. Für Ben Nevis wurden die Abweichungen per Stunde vom Tagesmittel angegeben, mithin sind dieselben nicht gleichbedeutend mit den übrigen Daten der Tabelle VI.

Dass die Regenmenge nach 6-, resp. 12stündigen Intervallen in Form der Abweichung von 25, resp. 50 % angegeben wurde, sollte nur dazu dienen, den Überblick zu erleichtern. Zum Vergleich eignen sich die Zahlen der Tabelle VI viel besser, als wenn die 6-, resp. 12stündige Menge selbst in Mm. mitgetheilt würde.

Die tageszeitliche Vertheilung des Niederschlages lässt zwei Haupttypen erkennen, nämlich ein:

1) Tagesmaximum, und ein

2) Nachtmaximum.

Das Tagesmaximum fällt auf 2 p.—8 p., das Nachtmaximum zerspaltet sich, und fällt an einigen Stationen auf 8 p.—2 a., an anderen auf 2 a.—8 a.

Tagesmaximum zwischen 2 p.—8 p. weisen die Stationen Nr. 1—23 auf, Ben Nevis auch hierher gerechnet, weil dort im Sommer und Frühling das Maximum auch am Tage auftritt.

Nachtmaximum zwischen 8 p.—2 a. zeigen 4 Stationen, als: Triest, Bern, Wien, Aachen. Erwähnt muss werden, dass in Wien im Jahre 1853—1856 das Maximum analog Prag und den anderen deutschen Stationen auf den Nachmittag (2 p.—8 p.) fällt, hingegen in der Periode 1881—1888 auf die Nacht (8 p.—2 a.).

* Supan. Vertheilung des Niederschlages. p. 86.

MAZELLE vermuthet, die Ursache davon in der minder guten Aufstellung des Regenmessers in den Jahren 1853—1856 suchen zu müssen.

Der zweite Typus des Nachtmaximums zwischen 2 a.—8 a. zeigt sich in Greenwich, Coimbra, Lissabon, Hongkong, Mauritius, Neu-Guinea, also in der Nähe des Meeres. Cordoba in Argentina macht aber eine Ausnahme davon.

Die zwei Haupttypen sind nicht in allen Jahreszeiten constant. Im Winter und Herbst stellt sich das Maximum in der Nacht oder am Vormittag ein, wo es im Sommer und Frühling auf den Nachmittag (2 p.—8 p.) zu fallen pflegt; z. B. in Berlin, Zechen, Prag, New-York, Simla, Batavia und Ben Nevis.

In Hongkong zeigt sich in den Monaten Nov.—Febr. das Nachtmaximum früher (8 p.—2 a.) als in den übrigen Jahreszeiten, in welchen der meiste Regen Vormittags fällt.

Das Nachmittagsmaximum des Regens steht nicht nur in Ungarn, sondern auch an anderen Orten mit dem Maximum der Gewitterhäufigkeit in engem Zusammenhange. Wo in den Tropen das Regenmaximum auf die Nacht fällt, wie in Batavia, Cherrapunjee*, Neu-Guinea, Borneo, Kamerun, da stellt sich auch das Maximum der Gewitterfrequenz** zur Nacht ein.

Aus den wenigen Daten, die in Tabelle VI enthalten sind, geht hervor, *dass der meiste Regen theils Nachmittags (2 p.—8 p.), theils in der Frühe (2 a.—8 a.) fällt.* Ob der Barometerstand bei dieser Erscheinung eine Rolle spielt oder nicht, muss einstweilen dahingestellt bleiben. Mit dem Anhäufen der Daten der registrierenden Regenmesser wird sich mit der Zeit auch der causale Nexus des Phänomens herausstellen, auch wird aufgedeckt werden, ob der Wechsel der See- und Landwinde einen Einfluss dabei ausübe oder nicht.

---

* Meteorol. Zeitschrift 1882, p. 402.

** Hann. Klimatologie II, p. 35, 77, 222, 237, 250.

9.

UEBER DAS SPECTRUM DER HIMMELSKÖRPER.

Von R. von KÖVESLIGETHY,
corr. Mitglied der ungarischen Academie der Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der ungarischen Academie
12. December 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö“ (Math. und Naturw. Anzeiger) Bd. XVII, pag. 112—156.

Die Aufgabe der Astrophysik ist die Untersuchung der von den Ortsveränderungen unabhängigen Eigenschaften der Himmelskörper. Zur vollen Beurtheilung des physikalischen Zustandes kommt daher neben den äusseren Kräften in erster Reihe die Temperatur in Betracht, oder mit andern Worten: der Himmel ist nicht mehr als ein Newtonsches System materieller Punkte, sondern als Häufung physikalischer Körper zu betrachten.

Die theoretische Grundlage der Untersuchung bildet die mechanische Wärmelehre, das praktische Hilfsmittel, die Beobachtungsdaten in eine der Theorie zugängliche Form zu bringen, liefert die Spectralanalyse. Jene entspricht in der Astronomie den mechanischen Principien, diese jenen Theorien, welche aus den geocentrischen Bewegungen die heliocentrischen erschliessen.

Blosse Beobachtung an sich führt weder hier, noch dort zum Ziele. Die Möglichkeit der Bahnbestimmung setzt die Kenntniss des Erdortes schon voraus, sei er nun, wie im Ptolemaeischen Systeme als ruhend, oder im Coppernikanischen Systeme als in einer Kepplerschen Ellipse fortbewegt gedacht. Aehnlicherweise müssen auch wir uns mit dem Zustande der Weltkörper befassen, noch ehe die Spectralanalyse hierüber endgiltigen Aufschluss gegeben, um das vielfach superponierte Spectrum der

Sterne in seine einfachen Bestandtheile zerlegen zu können. Die Gefahr des Kreisschlusses ist in beiden Wissenszweigen ausgeschlossen und die Analogie zwischen Schein und Wahrheit ist in beiden Fällen vollständig.

Unter Himmelskörpern verstehen wir zunächst in erster Reihe die Fixsterne, obwol kugelförmige Nebelflecken und Kometen, desgleichen die Atmosphären der Planeten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Der Vortheil einer Beschränkung ist jedoch klar: zunächst ist die Untersuchung gasförmiger Kugelmassen in der That interessanter und wichtiger, und zweitens lassen uns die theoretischen Grundlagen fast ganz im Stiche, sobald es sich um flüssige oder feste Körper handelt. Ein Vorwurf, der natürlich weder die Astrophysik, noch die Spectralanalyse, sondern nur die Wärmetheorie betrifft.

Die beiden Hauptprobleme der Astrophysik und Astronomie sind von logischem Standpunkte aus vollkommen conform. Der Annahme des geo- oder heliocentrischen Systems entsprechen hier gewisse Voraussetzungen über den Zustand und das Gleichgewicht des Stoffes. Wir wollen den Zustand im Allgemeinen als indifferent oder isentrop annehmen, und von dem Stoffe voraussetzen, dass er dem Boyle-Gay-Lussacschen Gesetze strenge gehorche, obgleich Abweichungen möglich sind, die den Zustand bis zum isothermen treiben und dem Stoffe die Eigenschaften eines gesättigten Dampfes verleihen. Diese Abweichungen können jedoch später in Rechnung gebracht werden und entsprechen vollkommen der Störungsrechnung der Astronomen. Die unter Anderem durch die Axendrehung entstehende Abweichung vom isentropen Gleichgewichtszustande ist das Analogon der von dem Orte in der Bahn abhängigen Störungen, während die Einführung des Van der Waals'schen Gesetzes jene Ungleichheiten berücksichtigt, welche in der Bewegungslehre von der sphäroidischen Gestalt der Himmelskörper herrühren. Diese Abweichungen sind hier wie dort klein; die Rechnungsvorschriften daher im Allgemeinen dieselben. Hierzu kommt aber noch, dass die astrophysikalischen und besonders die spectralphotometrischen Methoden noch immer eine ausnehmend geringe Genauigkeit beanspruchen.

Das Superpositionsspectrum der Himmelskörper.

Wir denken uns einen aus idealem Gase bestehenden kugelförmigen Weltkörper, dessen Materie in concentrischen Schichten gehäuft ist. Der äussere Radius der Kugel betrage r, und Allgemeinheit halber werde ein innerer kugelförmiger Kern mit dem Radius r_0 angenommen, der fest, flüssig oder ganz leer sein möge. Wäre ein solcher Kern nicht vorhanden, so ist $r_0 = 0$, und alle mit dem Index o auf die Oberfläche dieses Kernes bezogenen Grössen gelten einfach für den Mittelpunkt der Kugel.

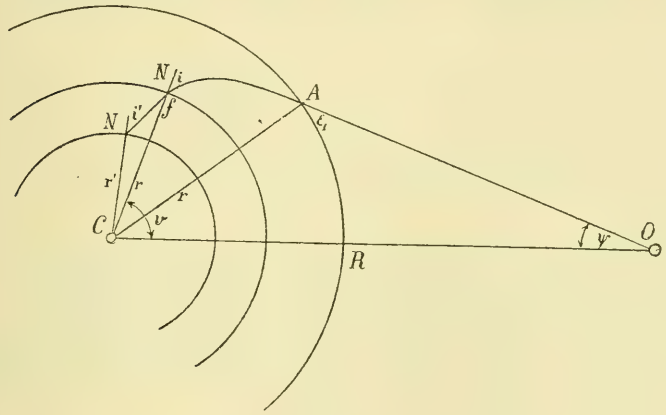


Fig. 1.
Gang eines Lichtstrahles im Innern der Gaskugel.

Es sei (Fig. 1.) C der Mittelpunkt der Kugel, O das Auge des Beobachters. Die Punkte N und N' liegen auf der Oberfläche einer Kugelschale mit den Radien r, r', innerhalb welcher Dichte und Brechungsindex des Gases merklich constant sind. Bedeutet n, n' in den besagten Punkten den absoluten Brechungsindex, i, i', f, f' Einfalls- und Brechungswinkel, so hat man

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{n'}{n},$$

und aus dem Dreiecke NCN':

$$\frac{\sin f}{\sin i'} = \frac{r'}{r},$$

also durch Multiplication beider Gleichungen

$$nr \sin i = \gamma = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für jede Schichte und jeden Einfallswinkel.

Ist nun v der Winkel, den der Radiusvector eines Punktes des Lichtstrahls mit der Axe CO einschliesst, so bestehen noch die folgenden Gleichungen

$$r\frac{dv}{dr} = \text{tang}\, i, \quad \left(\frac{d\varsigma}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{dv}{dr}\right)^2,$$

wenn mit $d\varsigma$ das in der Entfernung r liegende Wegelement der Lichtkurve bezeichnet wird. Die Elimination von i giebt:

$$v = \int_R^r \frac{\gamma\, dr}{r\sqrt{n^2r^2 - \gamma^2}}, \qquad \varsigma = \int_{r_1}^r \frac{n r\, dr}{\sqrt{n^2r^2 - \gamma^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei R die Entfernung des Sternes von der Erde, und ς die Länge des Lichtweges zwischen den Kugeln des Radius r und r_1 vorstellt.

Die Constante γ kann leicht bestimmt werden. Ist ε der Emanationswinkel, also die Ergänzung von i zu 90^0, ε_1 der Winkel, unter welchem der Strahl die äussere Oberfläche der Kugel verlässt, und ψ der scheinbare Halbmesser des Austrittspunktes, so ist wegen (1)

$$\gamma = rn \cos\varepsilon = r_1 \cos\varepsilon_1 = R \sin\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

insofern der Brechungsindex im leeren Raume und an der äussern Oberfläche des Weltkörpers 1 ist. Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass die irdische Strahlenbrechung im Punkte O besonders in Rechnung gezogen werde.

Dieselbe Gleichung ergiebt sich natürlich auch aus dem Dreiecke COA, und könnte zugleich mit (2) aus dem FERMAT'schen Satze abgeleitet werden. Die Dispersion ist überall vernachlässigt, so dass n eine reine Funktion der Dichte, also auch des Mittelpunktabstandes r wird.

Ein Kubikmeter eines Stoffes gebe bei der absoluten Temperatur θ' und der Dichte s' ein Spectrum mit der Intensität E', dessen Parameter μ' und A' (Wellenlänge des Intensitätsmaximums und Totalintensität) sein möge. Es werde angenommen, dass

durch vorhergegangene Laboratoriumsversuche diese zusammengehörigen Grössen bekannt seien. Demnach gilt:

$$E' = \frac{4}{\pi} \mu' A' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu'^2)^2},$$

und in einem andern Zustande θ, s, dem die Parameter A, μ entsprechen:

$$E = \frac{4}{\pi} \mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

wobei die Elemente A', μ' und A, μ mit einander durch die beiden Parametergleichungen verknüpft sind. Die erste lautet

$$\frac{\mu^3 \theta^4}{A} = \frac{\mu'^3 \theta'^4}{A'} = D,$$

wobei D die DRAPERsche Zahl, eine absolute Constante bedeutet. Ist weiter S die Entropie des Gases, also

$$S = c_v l \cdot \left(\frac{\theta}{s^{\varkappa - 1}}\right),$$

wobei c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen und $\varkappa$ das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Drucke und constantem Volumen bezeichnet, so hat man laut der zweiten Parametergleichung

$$\log . S' = \log . [S] + 0{,}684\ 1922 \log . \frac{\mu'}{m'} + \varkappa_2 \left(\frac{\mu'}{m'}\right)^2 + \varkappa_4 \left(\frac{\mu'}{m'}\right)^4 + \cdots$$

$$\log . S = \log . [S] + 0{,}684\ 1922 \log . \frac{\mu}{m} + \varkappa_2 \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 + \varkappa_4 \left(\frac{\mu}{m}\right)^4 + \cdots$$

aus welchen $[S]$ eliminiert werden kann. Insofern für $\mu = m$ die Grösse $[S]$ durch die Entropie des absolut schwarzen Körpers ausgedrückt werden kann, wird auch diese Grösse von der Stoffbeschaffenheit unabhängig und kann ein für allemal bestimmt werden. In allen diesen Gleichungen bedeutet m die Wellenlänge der Maximalintensität eines mit dem gegebenen Körper gleichtemperierten absolut schwarzen Körpers, das wegen der Beziehung

$$m \theta = K,$$

wobei K eine absolute Constante ist, mit der absoluten Temperatur zugleich gegeben ist.

Mit Hülfe der beiden Parametergleichungen kann aus dem Spectrum (A, μ) der Zustand (θ, s) der Lichtquelle berechnet werden,

und umgekehrt. Die nöthigen Zahlenwerthe, sowie die nöthige Umkehrung der betreffenden Gleichungen habe ich in einer früheren Abhandlung angegeben.*

Ist nun in dem Zustande (θ, s) statt eines Kubikmeters ein Prisma gegeben, dessen Basis f und dessen Höhe h ist, so ist die ausgestrahlte Intensität E_{fh} statt E, und es besteht die Gleichung

$$E_{fh} = Ef\frac{1-(1-\alpha)^h}{\alpha},$$

in welcher h eine einfache Länge bezeichnet, da ja die Absorption rein nur von der Anzahl der in den Lichtweg fallenden Theilchen abhängt. Bei gleicher Dichte fallen also auf einen h-mal grösseren Weg auch h-mal mehr Theilchen. Insofern die Absorption auch von der Dichte abhängt, ist sie vollauf dadurch berücksichtigt, dass in der Gleichung des Absorptionscoëfficienten

$$\alpha = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2$$

nicht mehr die dem Anfangszustande (μ', A') entsprechende Dichte vorkommt, sondern derjenige Werth, welcher zu den auch in E vorkommenden und die Dichteänderung schon enthaltenden Parametern μ und A gehört. Dies musste betont werden, da das Absorptionsgesetz in den meisten Fällen so gedeutet wird, als ob der Einfluss der Dichte rein in dem Exponenten berücksichtigt werden könnte. Dann sollte α die Absorption der Dichteeinheit vorstellen und der Exponent wäre einfach der Zahl der absorbierenden Theilchen, also dem Producte aus Dichte und Schichtendicke proportional. In dieser Form ist der Satz bekanntermaassen nicht richtig.

Aus dem Punkte M (Fig. 2.) der mit dem Radius r gezogenen Kugelschale erhebe sich unter dem Winkel $\varepsilon = 0$ der Strahl MAO, der das Auge unter dem Gesichtswinkel ψ treffe. Es wird sich später zeigen, dass die Figur richtig gezeichnet ist, insofern mit Ausnahme höchstens eines einzigen Strahles die Lichtwege im Innern der Kugel symmetrisch verlaufen und in

* Die beiden Parametergleichungen der Spectralanalyse. Diese Berichte XVI. Band pag. 1—49.

ihrem tiefsten Punkte je eine Kugelschale berühren. Ist die Intensität im Punkte M in der Mittelpunktsentfernung r per Volumeneinheit E, so ist die in einem um diesen Punkt gelegten Prisma von der Basis df und der in den Strahlengang fallenden Höhe $d\varsigma = NN'$ herrschende Intensität

$$i = dfE\frac{1-(1-\alpha)^{d\varsigma}}{\alpha}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

hiebei braucht, da das Element $d\varsigma$ auf der Basis df, die in unserer Zeichnung MN zur Projektion hat, senkrecht steht, die etwaige Abhängigkeit vom Emanationswinkel gar nicht in Betracht gezogen zu werden. Diese Abhängigkeit fällt im vorliegenden Falle schon deshalb weg, weil man es mit einem Gase

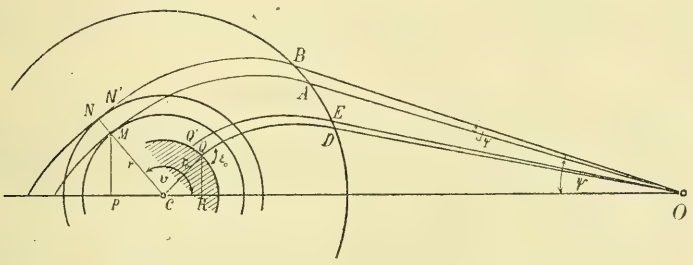


Fig. 2.

Elementarintensität einer glühenden Gaskugel.

zu thun hat, dessen jede einzelne Molekel als Lichtquelle aufgefasst werden kann. Bei festen Körpern müsste der Ausdruck allerdings noch mit $\Phi(\varepsilon) = \sin\varepsilon$ multipliciert werden, wenn ε den Winkel bezeichnet, unter welchem der Lichtstrahl die Kugelfläche verlässt.

Das Oberflächenelement df kann leicht bestimmt werden. Treffen in dem Auge O zwei unendlich nahe Strahlen unter dem Winkel ψ und $\psi + d\psi$ die Axe CO, so berührt der letztere eine um dr höher gelegene Kugelschichte im Punkte N. Nach (3) besteht nun, da in diesem Falle $\varepsilon = 0$ ist:

$$rn = R\sin\psi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

woraus dr als Funktion von $d\psi$ berechnet werden kann, wobei nur zu bedenken ist, dass r implicite auch in n vorkommt.

Beschreibt man nun mit dem Radius $MP = r \sin v$ einen auf die Axe CO senkrechten Kreis, so entsteht ein Kegelmantel mit der Oberfläche

$$df = 2\pi r \sin v \, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

innerhalb deren die Intensität in jedem Punkte dieselbe ist und deren jedes Element dem Lichtstrahle gegenüber gleich gelegen ist. Hierin ist dr durch (5) in der Form

$$n dr + r \frac{dn}{dr} dr = R \cos \psi \, d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

auszudrücken.

Unter Beibehaltung von unendlich kleinen Grössen erster Ordnung und da

$$\frac{E}{\alpha} = e$$

durch die Emission des absolut schwarzen Körpers ersetzt werden kann, erhält man aus (4):

$$i = - 2\pi r e l \cdot (1 - \alpha) \sin v \, d\varsigma \, dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als Intensität des durch den Punkt M gehenden unendlich schmalen Ringes, die jedoch wegen der Absorption auf dem Wege MA noch bedeutend modificiert wird.

Wäre auf diesem ganzen Wege Temperatur und Dichte constant, so wäre der ganze Ausdruck einfach mit $(1 - \alpha)^{\varsigma}$ zu multiplicieren, wenn ς die Länge des Bogens MA bedeutete. In jedem Punkte desselben ist jedoch der Absorptionscoëfficient ein anderer, und daher muss richtiger $(1 - A)^{\varsigma}$ geschrieben werden, wo A einen zwischen den Grenzen $\varsigma = 0$ und $\varsigma = \varsigma$ geeignet gewählten Mittelwerth darstellt. Laut des Schichtensatzes hat man hiefür

$$(1 - A)^{\varsigma} = (1 - \alpha_1)^{d\varsigma_1} (1 - \alpha_2)^{d\varsigma_2} \cdot \cdot (1 - \alpha_m)^{d\varsigma_m},$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_m$ die auf den einzelnen Wegelementen $d\varsigma_1, d\varsigma_2 .. d\varsigma_m$ gültigen Absorptionscoëfficienten sind, und wenn, wie natürlich

$$\varsigma = d\varsigma_1 + d\varsigma_2 + .. + d\varsigma_m.$$

Stetige Aenderung angenommen ergiebt die Gleichung

$$l \cdot (1 - A)^{\varsigma} = \int_0^{\varsigma} l \cdot (1 - \alpha) \, d\varsigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so dass die Intensität in M noch mit e^{0} multipliciert werden muss, um die von dem besagten Ringe aus der Kugel thatsächlich austretende Lichtmenge zu liefern. Der Factor ist natürlich für jedes Element des durch M gehenden Elementarringes derselbe.

Die Intensität der ganzen Kugel wird nun

$$J = -2\pi \int_0^{\psi_1} \int_0^{\varsigma} r \sin v \cdot el \cdot (1-\alpha) e^{0} \, d\varsigma \, dr, \qquad (10)$$

wobei die Integration nach ς über den ganzen im Innern der Kugel liegenden Lichtweg, nach r oder richtiger nach ψ von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi_1$ auszudehnen ist. Hierbei bedeutet

$$\sin \psi_1 = \frac{r_1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

den scheinbaren Halbmesser der Kugel, sin v und ς sind der Gleichung (2) zu entnehmen; e und α sind als Funktionen von Temperatur und Dichte wesentlich durch r ausdrückbar. Die Art der Abhängigkeit ist natürlich erst durch die Kenntniss der Zustandsgleichung des Weltkörpers gegeben.

Das Spectrum des festen Kernes kann ohne Mühe hingeschrieben werden. Sollte es selbst von gasförmigem Kerne herrühren, so müsste dessen Druck bereits so gross sein, dass derselbe annäherungsweise mit dem absolut schwarzen Körper vertauscht werden darf. Man kann sich also jedenfalls vorstellen, dass die das Spectrum liefernde Lichtmenge aus einer verhältnissmässig dünnen Schichte von der Dicke h herrühre, deren Zustand durch θ', s', μ', A' gegeben ist.

Die beiden benachbarten Strahlen ODQ und OEQ' (Fig. 2) schneiden auf der Oberfläche des Kernes das Bogenelement $QQ' = r_0 dv$ ab, wofür, um die Abhängigkeit von ψ darzulegen, $r_0 \frac{dv}{d\psi} d\psi$ geschrieben werden kann. Die Drehung des Radius $QR = r_0 \sin v$ um die Axe CO liefert wieder einen Ring, dessen Lichtstärke und Neigung gegen den Lichtstrahl in jedem Punkte dieselbe ist, und der wegen der Gleichheit der Wegelängen QD dieselbe Absorption erleidet. Bedeutet ε_0 die Neigung des Licht-

strahles gegen die Oberfläche des Kerns, so muss die Intensität noch mit sin ε_0 multipliciert werden, und man hat für die aus der Kugel austretende Lichtmenge

$$J_0 = 2\pi r_0^2 e' (1 - (1-\alpha')^h) \int_0^{\psi_0} \sin v \sin \varepsilon_0 \frac{dv}{d\psi} e^{\int_\varrho^0 l \cdot (1-\alpha) d\varrho} d\psi, \qquad (12)$$

da r_0, e', α', h für den Kern constant bleiben. ψ_0 bedeutet den scheinbaren Halbmesser des Kernes, also wie früher

$$\sin \psi_0 = \frac{r_0}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \qquad (13)$$

und das Integral nach ϱ ist von der Oberfläche des festen Kernes bis zur äusseren Oberfläche der Kugel auszudehnen. Der Zusammenhang zwischen ε_0 und ψ ist durch (3) gegeben, insofern

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{R}{r_0 n_0} \sin \psi \quad \ldots \ldots \ldots \qquad (14)$$

ist, wobei r_0, n_0 als für die Oberfläche des Kernes geltend, constant sind. v und ϱ kann durch ε_0 und ψ ausgedrückt werden, wenn man sich auf die Gleichungen (2) und (3) beruft.

Abgesehen von der Verminderung durch die Entfernung ist nun die in O sichtbare Lichtmenge $J + J_0$.

Die allgemeine Auswerthung der complicierten Integrale dürfte kaum möglich sein; im besten Falle lassen sich unendliche Reihen aufstellen, deren Coëfficienten von andern Grössen abgesehen noch Functionen der Wellenlänge sind, welche in α und e steckt. Die oben abgeleitete Intensität bezieht sich also nur auf homogenes Licht; die Intensität des Mischlichtes erhält man, wenn man die Ausdrücke (10) und (12) noch mit $d\lambda$ multipliciert und zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 integriert, falls das das Spectrum auffangende Agens zwischen den besagten Grenzen empfindlich ist.

Eine weitere Erschwerung des Problems kommt daher, dass das in v und ϱ auftretende Radical einer besonderen Untersuchung bedarf, je nachdem circulare Refraction möglich ist, oder nicht, dh. je nachdem der Wurzelausdruck in der ganzen Gaskugel reell ist, oder aber zonenweise imaginär werden kann. Im ersteren Falle gelangt ein jeder Strahl aus dem Innern der Kugel in den Welt-

raum; im letzteren Falle giebt es Strahlen, welche ganz im Innern der Kugel verbleiben.

Gegenstand der Beobachtung ist die Intensität $J + J_0$, welche mit Hülfe eines Spectralphotometers für jede Wellenlänge gesondert bestimmt wird, jedenfalls aber für so viele Stellen des Spectrums, als in dem Probleme Unbekannte vorkommen. Deren Zahl und Bedeutung zu bestimmen ist die Aufgabe der folgenden Abschnitte.

Die Zustandsgleichung gasförmiger Weltkörper.

Wir denken uns eine im Raume ruhende Gaskugel, die also weder mit Axendrehung, noch mit translatorischer Bewegung versehen sei, und in deren Innerem sich ein stationärer Zustand ausbildete. Erhebt sich daher in radialer Richtung eine Gasmasse, so wird der Gleichgewichtszustand nur in dem Falle nicht gestört, wenn die Masse jene Energie mit sich bringt, die sie an der Ankunftsstelle schon vorhanden findet. Das heisst aber, dass die Gasmasse von der Umgebung weder Wärme aufnimmt, noch ihr solche übergiebt, oder mit anderen Worten: die Gaskugel muss in isentropem Gleichgewichte sein.

Dieser Satz wurde schon von August Ritter mit Hülfe der kinetischen Gastheorie bewiesen; er kann aber ganz einfach rein auf Grund mechanischer Gesetze abgeleitet werden.

Der Zustand eines Gastheilchens in einer kugeligen, stationären Gasmasse ist nur eine Function des Mittelpunktabstandes. Radial wirkt das Gewicht des Theilchens, dh. die Resultierende aus Massenanziehung und Auftrieb, während die auf dem Radius senkrechten Kräfte, die Meridian- und Parallelcomponente, Null sind. Man hat daher als Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -g\left(1 - \frac{s'}{s}\right) = 0 \\ M &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\beta}{dt}\right) = 0, \quad P = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

worin $r\beta\lambda$ die Kugelcoordinaten des Theilchens, R, M, P die darauf wirkende Radial-Meridian- und Parallelcomponente bedeuten. g ist die Schwerebeschleunigung im Abstande r, s die Dichte des auf-

steigenden Theilchens ebendort, während s' die Dichte der Umgebung bezeichnet.

Die einzige Bedingung des Gleichgewichtes ist nun

$$s = s',$$

dh. das aufsteigende Theilchen muss stets die Dichte der Umgebung annehmen. Da beide stets demselben Drucke unterworfen sind, so muss sich das Theilchen im Aufstiege stets soweit abkühlen, dass es immer mit der Umgebung gleichtemperiert bleibt. Das ist aber die Bedingung des isentropen Gleichgewichtes.

Wäre das Verhältniss der Centrifugalbeschleunigung zu der Beschleunigung der Schwere unter dem Aequator γ, so hätte man

$$R = -g\left(1 - \frac{s'}{s} + \gamma\frac{r}{r_1}\cos^2\beta\right),$$

$$M = -\gamma g\frac{r}{r_1}\sin\beta\cos\beta;\quad P = 0,$$

so dass durch die Axendrehung in der That Abweichungen vom isentropen Zustande zu Stande kommen würden.

Als Einheiten werden das Meter und Kilogramm gewählt; unter g verstehen wir immer die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche, unter s die Schwere eines Kubikmeters auf der Erde gemessen.

In allen Punkten der Gasmasse ausserhalb des etwaigen festen Kernes besteht die hydrodynamische Gleichung

$$dp = -\frac{g_r}{g}s\,dr, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

in welcher g_r die in der Entfernung r gemessene Schwere im Weltkörper, p den daselbst herrschenden Druck bedeutet. Ist

$$u = \frac{g_r}{g_1} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

das Verhältniss der Schwere im Punkte r und auf der Oberfläche des Weltkörpers, so hat man nach dem NEWTONschen Gesetze

$$u = \frac{m r_1^2}{M r^2} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

wobei m die in der Kugel vom Radius r, M die ganze von der

Vollkugel mit dem Radius r_1 eingeschlossene Masse bedeutet. Die Gleichung (16) wird nun

$$dp = -\frac{g_1}{g} u s dr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Wegen der concentrischen Schichtung kann

$$dm = 4\pi r^2 s dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

als Massenelement aufgefasst werden. Hiermit wird der Differentialquotient von (18) und (19)

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi r_1^2}{M} s - \frac{2}{r} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und

$$\frac{du}{dr} = -\frac{g}{g_1}\left(\frac{1}{s}\frac{d^2p}{dr^2} - \frac{1}{s^2}\frac{ds}{dr}\frac{dp}{dr}\right). \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (22)$$

Durch Vergleichung der beiden Resultate und Elimination von u mittels (19) erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{s}\frac{ds}{dr}\right)\frac{dp}{dr} + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{Mg} s^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

als allgemeinste Gleichung des Zustandes. Der hieraus zu berechnende Druck ist ohne Weiteres mit den an der Erdoberfläche messbaren Drucken vergleichbar.

Die Integration ist natürlich erst dann möglich, wenn zwischen den unabhängigen Veränderlichen p und s noch eine Bedingung gegeben ist. Dieser Fall liegt hier vor, da dem Früheren nach angenommen werden soll, dass der Zustand isentrop ist. Allgemein aber ersieht man, dass dem rein mechanischen Gleichgewichte auf unendlich viele Arten entsprochen werden kann. Unter den unendlich vielen mechanisch möglichen Gleichgewichtszuständen ist aber nur ein einziger, der auch von thermischem Gesichtspunkte aus ein Gleichgewichtszustand ist.

Die gegebene Gleichung könnte noch in andere Form gebracht werden, welche auch den zeitlichen Veränderungen des Zustandes Rechnung trägt. Die Ableitung einer partiellen Differentialgleichung gewinnt Wichtigkeit, sobald Himmelskörper von verschiedener Entwickelungsstufe mit einander verglichen werden sollen, mag aber an dieser Stelle übergangen werden.

Die Annahme des isentropen Zustandes liefert die folgenden Gleichungen:

$$p = p_0 \frac{\theta^{\frac{k}{k-1}}}{\theta_0^{\frac{k}{k-1}}} \text{ und } s = s_0 \frac{\theta^{\frac{1}{k-1}}}{\theta_0^{\frac{1}{k-1}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

in welchen sich p_0, s_0, θ_0 auf den Mittelpunkt der Gaskugel, beziehentlich auf die Oberfläche des festen Kernes beziehen. Führt man die Werthe von p und s in (23) ein, so kommt

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \frac{4\pi(k-1)g_1 r_1^2 s_0^2 \theta_0^{\frac{k-2}{k-1}}}{kgMp_0}\theta^{\frac{1}{k-1}} = 0. \quad . \quad . \quad (25)$$

Um relative Werthe einzuführen, sei

$$\frac{r}{r_1} = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (26)$$

und ähnlicherweise

$$\frac{\theta}{\theta_0} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

weiter

$$q^2 = \frac{4\pi(k-1)r_1^4 g_1 s_0^2}{kgMp_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und

$$\frac{1}{k-1} = n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

so wird die Zustandsgleichung einfach

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + q^2 y^n = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die Constante q^2 ist wesentlich positiv und kann auf verschiedene Weisen geschrieben werden. Mit Hülfe des Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetzes und der bekannten Beziehung

$$AR = c_p - c_v = c_v(k-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

in welcher $A = \frac{1}{424}$, wird

$$q^2 = \frac{4\pi A g_1 r_1^4 s_0}{c_p g M \theta_0}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Ist (s) die mittlere Dichte des Himmelskörpers, so kann man auch

$$q^2 = \frac{3Ag_1 r_1 s_0}{c_p g \theta_0 (s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

schreiben. Bedeutet endlich T und a die Masse und den mittleren Radius der Erde, S die mittlere Dichte derselben, so wird

$$\frac{g_1}{g} = \frac{Ma^2}{Tr_1^2},$$

und

$$q^2 = \frac{3Ar_1^2 s_0}{c_p a \theta_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

und weitere Beziehungen lassen sich leicht finden, wenn man auch den ersten Differentialquotienten von y einführen wollte.

Wäre die Gleichung (30) integriert, so hätte man sämmtliche, den Zustand bestimmende Grössen als Function des Mittelpunktabstandes.

In der Entfernung $r = r_1 x$ ist die Temperatur laut (27)

$$\theta = \theta_0 y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

und nach (24) Dichte und Druck

$$s = s_0 y^n \text{ und } p = p_0 y^{n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Aehnlicherweise ergiebt sich aus (19) die relative Schwere

$$u = -(n+1)\frac{g p_0}{g_1 r_1 s_0}\frac{dy}{dx},$$

oder nach Einführung von q^2:

$$u = -\frac{4\pi r_1^3 s_0}{Mq^2}\frac{dy}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

was noch kürzer in der eleganten Form

$$g_r = -c_p g \frac{d\theta}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

geschrieben werden kann.

Die Masse und mittlere Dichte des Himmelskörpers ergeben sich endlich zu

$$M = 4\pi r_1^3 s_0 \int_0^1 x^2 y^n dx \text{ und } (s) = 3 s_0 \int_0^1 x^2 y^n \, dx. \quad \ldots \quad (39)$$

Die erste Entwickelungstufe eines Weltkörpers ist möglicherweise dadurch gegeben, dass die ganze Masse homogen, der Körper also isopler ist. In diesem Falle, da

$$u = \frac{r}{r_1}$$

ist, bleibt die Zustandsgleichung erster Ordnung, und es wird

$$p = \frac{g_1 s}{2 g r_1}(r_1^2 - r^2),$$

wenn man die Constante so bestimmt, dass der Druck an der Oberfläche Null werde. Aehnlich wird die Temperatur

$$\theta = \frac{g_1}{2gr_1R}(r_1^2 - r^2).$$

Natürlich giebt es auch Abweichungen vom isentropen Zustande, welche auf einer vorgeschrittenen Stufe der Entwickelung bis zur Herstellung des isothermischen Zustandes gehen können. Die Gleichung dieses Zustandes ergiebt sich aus (23), wenn p mit Hülfe des BOYLE-GAY-LUSSAC'schen Gesetzes eliminiert und θ als constant betrachtet wird. Man erhält so

$$\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{ds}{dr} - \frac{1}{s}\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{MgR\theta}s^2 = 0,$$

oder indem man

$$\frac{r}{r_1} = x, \quad \frac{s}{s_0} = z$$

setzt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + q_1^2 z^2 = 0,$$

wobei wieder

$$q_1^2 = \frac{4\pi r_1^4 g_1 s_0}{MgR\theta}$$

genommen wurde. Zwischen den Constanten des isothermen und isentropen Zustandes besteht die Beziehung

$$q_1^2 = \frac{k}{k-1}q^2.$$

Integration der Zustandsgleichung des isentropen Gleichgewichtes.

Die Gleichung (30) lässt sich in geschlossener Form nur für wenige Specialwerthe der Zahl $n = \frac{1}{k-1}$ integrieren. k liegt als Verhältniss der beiden specifischen Wärmen zwischen den Grenzen 1 und $^5/_3$ und hängt theoretisch nur von der Anzahl der in der Molekel vorhandenen Atome ab, derart, dass in einer m-atomigen Molekel

$$k = \frac{2m+3}{2m+1}, \text{ also } n = m + \frac{1}{2}$$

wird. Allgemeiner, und ohne die Giltigkeit der Gleichung (30)

zu beschränken, kann man auch sagen, dass der Zustand des Gases durch die Bestimmung

$$\frac{p}{s^k} = \text{const.}$$

gegeben ist, wobei k nur der Bedingung

$$\infty > k > 1$$

unterworfen ist. Der so dargestellte Gleichgewichtszustand ist jedoch nur dann ein isentroper, wenn

$$^5/_3 \geqq k \geqq 1$$

gewählt wird.

Ist $n = 0$, also $k = \infty$, so hat man die Bedingung des isopleren Zustandes, und die Gleichung (30) giebt

$$y = A + \frac{B}{x} - \frac{q^2}{6} x^2;$$

ist dagegen $n = 1$, also $k = 2$, so kommt

$$y = A \frac{\sin qx}{qx} + B \frac{\cos qx}{qx}.$$

Schon diese beiden einfachen Fälle zeigen, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob ein fester Kern vorhanden ist, oder nicht. Im ersteren Falle bestimmen sich die Constanten A und B aus den Bedingungen, dass an der Oberfläche des Kernes, also für $x = x_0$ die Temperatur $\theta = \theta_0$, oder $y = 1$ wird, während an der äusseren Oberfläche für $x = 1$ die Temperatur $y = 0$ ist. Dies giebt daher für $n = 0$ und $n = 1$ beziehentlich

$$y = \frac{q^2}{6(1 - x_0)} \left(1 - x_0^3 - \frac{x_0}{x}(1 - x_0^2) - x^2(1 - x_0)\right) + \frac{x_0(1 - x)}{x(1 - x_0)}$$

und

$$y = \frac{x_0 \sin q(1 - x)}{x \sin q(1 - x_0)},$$

in welchen Gleichungen q^2 natürlich ganz beliebig sein kann.

Durchaus anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Weltkörper seiner ganzen Masse nach gasförmig ist. Schon die Differentialgleichung zeigt, dass in dem Punkte $x = 0 : y = \infty$ wird, was als physikalische Lösung nicht angenommen werden kann, da die Temperatur auch im Mittelpunkt der Kugel endlich bleiben muss. Es muss daher in dem Punkte $x = 0$ auch

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ sein, wie dies entweder aus der Gleichung (30) oder aus (37) gefolgert werden kann, insofern auch die Schwere im Centrum verschwindet.

Für kernlose Gaskugeln bleibt also noch eine dritte Bedingung zu erfüllen, welche, da die beiden Constanten durch die Grenzbedingungen schon bestimmt sind, den Werth der Grösse q^2 beeinflusst. Man findet so, dass in den beiden abgeleiteten Integralen a priori $B = 0$ sein muss; die Mittelpunktsbedingung liefert für beide Fälle $A = 1$, und die Oberflächenbedingung fordert für $n = 0 : q^2 = 6$, für $n = 1$ dagegen $q = \pi$.

So wird q vollkommen unabhängig von den Dimensionen der Gaskugel und dem thermischen Zustande ihres Mittelpunktes, und erscheint rein durch n, also der molekularen Zusammensetzung des Gases, gegeben, so dass für alle gasförmigen Weltkugeln, deren Molekeln aus der gleichen Anzahl von Atomen zusammengesetzt sind,

$$q^2 = \frac{3A}{c_p a S} \cdot \frac{r_1^2 s_0}{\theta_0}$$

constant ist. Führt man wieder den Druck ein, so fällt auch c_p weg, und man hat schliesslich:

$$q^2 = \frac{3}{aS} \cdot \frac{r_1^2 s_0^2}{(n+1)p_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass dieses q auch während der ganzen Entwickelung des Weltkörpers dasselbe bleibt.

Von constanten Factoren abgesehen ergiebt sich dieselbe Gleichung, wenn man in (23) einen beliebigen Zusammenhang der Grössen p und s voraussetzt. Es folgt hieraus: *in ihrer ganzen Masse gasförmige Weltkörper bilden keine Individuen, sondern nach der Art ihres Gleichgewichts und ihres molekularen Aufbaues zu beurtheilende Classen.* Ist aber nur der geringste feste Kern vorhanden, so kann q^2 jeden beliebigen Werth annehmen.

Diesen Satz fand zuerst für homogene Flüssigkeiten ZÖLLNER, für den isothermen Zustand sprach ihn A. RITTER aus.

Setzt man

$$z = xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

so wird aus (30) die einfache Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + q^2 \frac{z^n}{x^{n-1}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

welche sogleich die Integrabilität für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ zeigt. Zugleich erhält man das singuläre Integral in der Form

$$y = \left(\frac{2(n-3)}{(n-1)^2 q^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} x^{-\frac{2}{n-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

oder für zweiatomige Gase ($k = 7/5$, $n = 2{,}5$)

$$y = \left(\frac{2}{3q}\right)^{4/3} x^{-4/3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Ein erstes Integral ergiebt sich leicht, wenn

$$y = x^r \, Y^s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

gesetzt wird, wobei

$$r + s = -\frac{2}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

sein muss. Schreibt man nämlich

$$Y = xt \text{ und } \frac{dY}{dx} = t + u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

so kommt

$$tu\frac{du}{dt} + (1 + 2(r+s))tu + \frac{1}{s}(r+s)(r+s+1)t^2 + (s-1)u^2 + \frac{q^2}{s}t^{(n-1)s+2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

worin noch über s beliebig verfügt werden kann. Am einfachsten ist es wohl, entweder u^2 oder den Exponenten $(n-1)s + 2$ von t zum Verschwinden zu bringen.

Hat man das Integral der Gleichung (48), so ist auch das von (30) bekannt, insofern

$$l \cdot \frac{x}{c} = \int \frac{dt}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

wird, wenn c die zweite Integrationsconstante bedeutet. An Stelle von t hat man schliesslich

$$t = \left(\frac{y}{x^{r+s}}\right)^{\frac{1}{s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

zu setzen.

1) Es sei $s = 1$, dann kommt aus (48)

$$u\frac{du}{dt} - \frac{5-n}{n-1}u + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}t + q^2t^n = 0, \quad . \quad . \quad (51)$$

und hierin ist

$$r = -\frac{n+1}{n-1}, \quad t = x^{\frac{2}{n-1}}y, \quad u = x^{\frac{n+1}{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{n-1}yx^{\frac{2}{n-1}}. \quad (52)$$

Man sieht sogleich, dass $n = 5$ einem neueren integrablen Falle entspricht, der besonders interessant ist. Das allgemeine Integral lautet

$$u = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{q^2}{3}t^6},$$

wenn a die willkürliche Constante ist. Hiernach wird

$$1 \cdot \frac{x}{c} = \int \frac{dt}{\sqrt{a + \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{q^2}{3}t^6}},$$

worin nach geschehener Integration noch

$$t = \sqrt{x}\,y$$

zu setzen sein wird. Das hyperelliptische Integral lässt sich durch die dem Problem entsprechende Wahl der Constanten vereinfachen. Für $x = 0$ ist $y = 1$, also $t = 0$ und gleicherweise $u = 0$. Man hat daher $a = 0$ und es bleibt

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1 - \tfrac{4}{3}q^2t^4} - 1\right),$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von t:

$$y = c\left(x^2 + \frac{c^4}{3}q^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn man statt der willkürlichen Constante $c : -\frac{c^2}{2}$ schreibt. Da für $x = 0$ $y = 1$ werden soll, muss

$$c = \frac{\sqrt{3}}{q}$$

sein, und man hat

$$y = \frac{\sqrt{3}}{q\left(x^2 + \frac{3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Bildet man hieraus mittelst (37) den Werth von u, so kommt

$$u = \frac{4\sqrt{3}\,\pi r_1^3 s_0}{Mq^3}\,\frac{x}{\left(x^2+\frac{3}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Noch ist nicht berücksichtigt worden, dass $y = 0$ sein muss für $x = 1$. Dies erfordert $q = \infty$, und es bleibt somit

$$u = \frac{A}{x^2},$$

wo A eine Constante bezeichnet. Dies ist jedoch die Anziehung eines einzigen Massenpunktes, und man hat daher den schon von RITTER betonten Satz: Eine Gaskugel, für welche das Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten $^6/_5$ beträgt, schrumpft in einen einzigen Punkt zusammen.

Für zweiatomige Gase $(n = {}^5/_2)$ wird (51) und (52)

$$u\frac{du}{dt} - \tfrac{5}{3}u + \tfrac{4}{9}t + q^2 t^{5/2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51\text{a})$$

$$u = x^{4/3}\left(\tfrac{4}{3}y + x\frac{dy}{dx}\right),\ t = x^{4/3}y, \quad . \quad . \quad . \quad (52\text{a})$$

deren Integral unschwer zu finden ist. Setzt man

$$u = a_0 + a_1 t^{1/2} + a_2 t^{2/2} + a_3 t^{3/2} \ldots + a_i t^{i/2} \ldots, \quad . \quad (53)$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}a_0 a_1 = o\\
&\tfrac{2}{2}(a_o a_2 + \tfrac{1}{2}a_1^2) = \tfrac{5}{3}a_o\\
&\tfrac{3}{2}(a_o a_3 + a_1 a_2) = \tfrac{5}{3}a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53\text{a})\\
&\tfrac{2i}{2}\left(a_0 a_{2i} + a_1 a_{2i-1} + \cdots + \tfrac{1}{2}a_i^2\right) = \tfrac{5}{3}a_{2i-2}\\
&\tfrac{2i+1}{2}\left(a_0 a_{2i+1} + a_1 a_{2i} + \cdots + a_i a_{i+1}\right) = \tfrac{5}{3}a_{2i-1}.
\end{aligned}$$

Für $2i = 4$ und $2i + 1 = 7$ dagegen hat man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{4}{2}(a_0 a_4 + a_1 a_3 + \tfrac{1}{2}a_2^2) = \tfrac{5}{3}a_2 - \tfrac{4}{9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53\text{b})\\
&\tfrac{7}{2}(a_0 a_7 + a_1 a_6 + a_2 a_5 + a_3 a_4) = \tfrac{5}{3}a_5 - q^2.
\end{aligned}$$

Zufolge der ersten Gleichung in (53a) ist entweder $a_0 = 0$, oder $a_1 = 0$. Die erstere Annahme führt jedoch alsbald zu sich widersprechenden Werthen; daher ist a_0 die Integrationsconstante, und

$$a_1 = 0.$$

Die übrigen Gleichungen geben hiernach

$$a_2 = \tfrac{5}{3};\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{2}{9\,a_0},\ a_5 = 0,\ a_6 = \frac{20}{9^2\,a_0^2},$$

$$a_7 = -\frac{2}{7\,a_0}q^2,\ a_8 = -\frac{1}{3\,a_0^3},\ \cdot\cdot$$

und können mit Hülfe der Formeln (53) leicht weiter berechnet werden. Man hat demnach

$$u = a_0 + \tfrac{5}{3}t - \frac{2}{9\,a_0}t^2 + \frac{20}{9^2\,a_0^2}t^3 - \frac{1}{3\,a_0^3}t^4 + \frac{364}{9^3\,a_0^4}t^5 - \frac{5236}{9^4\,a_0^5}t^6 + \cdot\cdot$$
$$- \frac{2}{7\,a_0}q^2t^{7/2} + \frac{10}{3\cdot 9\cdot a_0^2}q^2t^{9/2} - \frac{394}{7\cdot 9\cdot 11\cdot a_0^3}q^2t^{11/2} + \cdots \quad (53\,c)$$

wobei mit Rücksicht auf (52a)

$$a_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}.$$

Da an der Oberfläche der Kugel die relative Schwere $u = 1$ wird, so ergiebt sich aus (37) sogleich der Werth von a_0 in der Form

$$a_0 = -\frac{(s)}{3\,s_0}q^2.$$

Im Sinne der Gleichung (49) soll nun

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a_0}\left(1 + b_1t^{1/2} + b_2t^{2/2} + \cdots + b_it^{i/2}\cdot\cdot\right) \quad (54)$$

gebildet werden. Für die b Coëfficienten besteht die Recursionsformel

$$b_i + b_{i-1}a_1 + b_{i-2}a_2 + \cdots + b_1a_{i-1} + a_i = 0 \quad (55)$$

und die ersten Coëfficienten werden

$$b_1 = b_3 = b_5 = 0;\ b_2 = -\frac{5}{3\,a_0},\ b_4 = \frac{3}{a_0^2},\ \cdot\cdot$$

so dass das Integral (49) in der Form erscheint:

$$l\cdot\frac{x}{c} = \frac{1}{a_0}\left(t - \frac{5}{6\,a_0}t^2 + \frac{1}{a_0^2}t^3 - \frac{455}{4\cdot 9^2a_0^3}t^4 + \frac{292}{3\cdot 5\cdot 9\cdot a_0^4}t^5 - \cdot\cdot\right.$$
$$- \frac{15359}{6\cdot 9^3a_0^5}t^6 + \cdot\cdot + \frac{4}{7\cdot 9\,a_0^2}q^2t^{9/2} - \frac{500}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\,a_0^3}q^2t^{11/2} +$$
$$\left. + \frac{53776}{7\cdot 9^2\cdot 11\cdot 13\cdot a_0^4}q^2t^{13/2} + \cdot\cdot\right) \quad (56)$$

in welchem noch

$$t = x^{4/3}y$$

zu setzen ist. Da man es hier mit zwei Constanten zu thun hat, so haben wir das allgemeine Integral vor uns, welches jedoch im Punkte $x = 0$ nicht angewendet werden kann. Für $x = 1$ hat man dagegen $y = 0$, daher auch $t = 0$ und hiermit wird $c = 1$.

Die Reihe convergiert nahe der Oberfläche des Himmelskörpers ziemlich rasch, und kann im Falle eines mit einem Kern versehenen Körpers auch an der Oberfläche dieses Kernes angewendet werden. Behufs praktischer Anwendung ist jedoch noch eine langwierige Umkehrung erforderlich.

2) Ein explicite Reihe erhält man, wenn in (48)

$$s = -\frac{2}{n-1}$$

gewählt wird. Die Gleichung wird dann

$$tu\frac{du}{dt} - \frac{5-n}{n-1}tu + \frac{n-3}{n-1}t^2 - \frac{n+1}{n-1}u^2 - \frac{n-1}{2}q^2 = 0. \quad (57)$$

Setzt man nacheinander

$$u = \frac{\varphi}{\psi}, \psi = \frac{n-1}{5-n}\varphi' \text{ und } \varphi = e^{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

und betrachtet t als die unabhängige Variabele, so kommt

$$t\frac{d^2t}{d\eta^2} - t\frac{dt}{d\eta} - \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{dt}{d\eta}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{5-n}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}q^2 - \frac{n-3}{n-1}t^2\right) = 0 \quad (59)$$

deren Auflösung unmittelbar y als Funktion von x liefert. Die angezeigten Substitutionen geben laut (49)

$$l \cdot \frac{x}{c} = \frac{n-1}{5-n}\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und da nach (50)

$$t = \left(xy^{\frac{n-1}{2}}\right)^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

ist, so ist das gewünschte Ziel erreicht.

Setzt man nun

$$t = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{2i}\eta^{2i} + a_{2i+1}\eta^{2i+1} + \cdots, \quad (62)$$

so wird

$$1 \cdot 2\left(a_2a_0 + \tfrac{1}{2}a_1^2\right) - 1a_0a_1 - \frac{2n}{n-1}1^2a_1^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}a_0^2 - \frac{(n-1)^3}{2(5-n)^2}q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63\,a)$$

und für die weiteren Coëfficienten:

$$(2i+1)(2i+2)(a_0a_{2i+2}+a_1a_{2i+1}+a_2a_{2i+}..+\tfrac{1}{2}a_{i+1}^2)-$$
$$-(2i+1)(a_0a_{2i+1}+a_1a_{2i}+a_2a_{2i-1+}..+a_ia_{i+1})-$$
$$-\frac{4n}{n-1}\Big(1(2i+1)a_1a_{2i+1}+2(2i)a_2a_{2i}+3(2i-1)a_3a_{2i-1+}..$$
$$+\tfrac{1}{2}(i+1)^2a_{i+1}^2\Big)+$$
$$+2\frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}\Big(a_0a_{2i}+a_1a_{2i-1}+a_2a_{2i-2+}..+\tfrac{1}{2}a_i^2\Big)=0; \quad (63\,b)$$

$$(2i+2)(2i+3)(a_0a_{2i+3}+a_1a_{2i+2}+a_2a_{2i+1+}..+a_{i+1}a_{i+2})-$$
$$-(2i+2)(a_0a_{2i+2}+a_1a_{2i+1}+a_2a_{2i+}..+\tfrac{1}{2}a_i^2{}_{+1})-$$
$$-\frac{4n}{n-1}\Big(1(2i+2)a_1a_{2i+2}+2(2i+1)a_2a_{2i+1}+3(2i)a_3a_{2i+}..$$
$$+(i+1)(i+2)a_{i+1}a_{i+2}\Big)+$$
$$+2\frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}\Big(a_0a_{2i+1}+a_1a_{2i}+a_2a_{2i-1+}..+a_ia_{i+1}\Big)=0.$$

In diesen Gleichungen bedeuten a_0 und a_1 die Integrationsconstanten; da hiezu noch die dritte Constante c hinzutritt, so besteht natürlich zwischen denselben eine Bedingungsgleichung, derzufolge eine derselben herausfällt.

Die Formeln (60), (61) und (62) geben nun für das gesuchte Integral

$$y=\frac{1}{x^{\frac{2}{n-1}}}\left(a_0+a_1\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot\frac{x}{c}\right)+a_2\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot\frac{x}{c}\right)^2+..\right)^{-\frac{2}{n-1}}, \quad (64)$$

das jedoch um den Mittelpunkt voller Gaskugeln ebenfalls unbrauchbar wird. Für Punkte an der Oberfläche wird $x=1$, also

$$y_1=\left(a_0-a_1\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot c\right)+a_2\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot c\right)^2-..\right)^{-\frac{2}{n-1}} \quad . \quad (65)$$

eine Gleichung, die nach der Bestimmung der Constanten die Beziehung zwischen n und q liefert.

3) Um auch eine in der Umgebung des Mittelpunktes gültige Entwickelung zu bekommen, differenzieren wir die Gleichung (30) i mal; man erhält so

$$x\frac{d^{i+2}y}{dx^{i+2}}+(2+i)\frac{d^{i+1}y}{dx^{i+1}}+q^2x\frac{d^i(y^n)}{dx^i}+iq^2\frac{d^{i-1}(y^n)}{dx^{i-1}}=0.$$

Es lässt sich so y in eine nach steigenden Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln, und die Bedingung $y_0 = 1$ für $x = x_0$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ geben die beiden nöthigen Constanten. Die Entwickelung ist auch noch für $x_0 = 0$ gültig, nur muss dann $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ gesetzt werden, wodurch alle ungeraden Differentialquotienten ausfallen und eine nur nach geraden Potenzen von x fortschreitende Reihe bleibt. Die ersten Glieder sind:

$$y = y_0 + \frac{1}{1!} y_0'(x - x_0) - \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{x_0} y_0' + q^2 y_0^n\right)(x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{2 \cdot 3}{x_0^2} y_0' + \frac{2q^2}{x_0} y_0^n - n q^2 y_0^{n-1} y_0'\right)(x - x_0)^3 + \cdot\cdot, \quad (66)$$

die sich indessen etwas vereinfachen, da in den Anwendungen stets $y_0 = 1$ wird. Im Falle $n = 5/2$ hat man

$$y = 1 - \frac{1}{1!}\alpha x_0 q^2 (x - x_0) + \frac{1}{2!}(2\alpha - 1) q^2 (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\alpha x_0 q^4 - \frac{2(3\alpha - 1)}{x_0} q^2\right)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{15}{4}\alpha^2 x_0^2 q^6\right.$$
$$\left. - \frac{5}{2}(4\alpha - 1) q^4 + \frac{8(3\alpha - 1)}{x_0^2} q^2\right)(x - x_0)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{15}{8}\alpha^3 x_0^3 q^8\right.$$
$$\left. + \frac{5}{2}(17\alpha - 7)\alpha x_0 q^6 + \frac{10(5\alpha - 1)}{x_0} q^4 - \frac{40(3\alpha - 1)}{x_0^3} q^2\right)(x - x_0)^5$$
$$+ \frac{1}{6!}\left(\frac{15}{16}\alpha^4 x_0^4 q^{10} - \frac{5}{8}(42\alpha - 57)\alpha^2 x_0^2 q^8 - 5\left(69\alpha^2 - 34\alpha + \frac{7}{2}\right) q^6\right.$$
$$\left. - \frac{60}{x_0^2}(5\alpha - 1) q^4 + \frac{240}{x_0^4}(3\alpha - 1) q^2\right)(x - x_0)^6 + \cdot\cdot, \quad (67)$$

wo nun α die Stelle der zweiten willkürlichen Constante einnimmt; sie ist aus der Gleichung zu berechnen, wenn $x = 1$ und $y = 0$ gesetzt wird. Bedeutet nämlich u_0 das Verhältniss der Schwere auf der Oberfläche des festen Kernes und der ganzen Kugel, und ist M_0 die Masse des Kernes, so hat man

$$u_0 = \frac{M_0}{M x_0^2},$$

und demgemäss nach (37)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{3}\frac{(s_0)}{s_0} x_0 q^2 = -\alpha x_0 q^2, \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

wenn (s_0) die mittlere Dichte des Kernes bezeichnet. Ist $x_0 = 0$, also auch $(s_0) = s_0$, so wird $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$, wie wir schon einigemale gezeigt haben.

Ist eine Reihe für y schon bekannt, so braucht das in den Gleichungen (36 — 39) auftretende y'' nicht mehr mit Hülfe des Polynomsatzes berechnet zu werden, sondern lässt sich nach (30) einfach durch zweifache Differentiation ableiten:

$$y^n = -\frac{1}{q^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Wir betrachten nun ausschliesslich den Fall einer vollen Gaskugel, und setzen

$$y = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Die Anwendung des Polynomsatzes giebt

$$y^n = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

wo, wie bekannt für die A Coëfficienten die Recursionsformel

$$\begin{aligned}(i+1)\ A_{i+1} &= (i+1)\,n\,a_{i+1} + (in-1)\,a_iA_1\\ &+((i-1)\,n-2)\,a_{i-1}A_2 + ((i-2)\,n-3)\,a_{i-2}A_3\\ &+((i-3)\,n-4)\,a_{i-3}A_4 + \cdots + (4n-(i-3))\,a_4A_{i-3}\\ &+(3n-(i-2))a_3A_{i-2} + (2n-(i-1))\,a_2A_{i-1} + (n-i)a_iA_i \quad (72)\end{aligned}$$

gilt. Durch Substitution von (70) und (71) in die ursprüngliche Gleichung (30) erhält man:

$$a_{2i+2} = -\frac{A_{2i}}{(2i+2)(2i+3)}q^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

so dass die ersten Coëfficienten

$$a_2 = -\frac{q^2}{3!};\ a_4 = \frac{nq^4}{5!};\ a_6 = -\frac{q^6}{7!}\left(n^2 + \frac{5!}{2(3!)^2}n(n-1)\right);$$

$$a_8 = \frac{q^8}{9!}\left(n^3 + \left(\frac{5!}{2(3!)^2} + \frac{7!}{3!\,5!}\right)n^2(n-1) + \frac{7!}{(3!)^4}n(n-1)(n-2)\right) \quad (74)$$

werden.

Für zweiatomige Gase, also für $n = {}^5/_2$ hat man daher

$$\begin{aligned}y = 1 &- \frac{1}{3!}(qx)^2 + \frac{5}{2\cdot 5!}(qx)^4 + \frac{5^2}{2\cdot 7!}(qx)^6 + \frac{5^4}{2\cdot 3\cdot 9!}(qx)^8\\ &- \frac{5^2\cdot 1252}{4!\ 11!}(qx)^{10} + \frac{5^3\cdot 21984}{5!\ 13!}(qx)^{12} - \frac{5^4\cdot 4330464}{7!\ 15!}(qx)^{14}\\ &+ \frac{5^5\cdot 26150368}{7!\ 17!}(qx)^{16} - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)\end{aligned}$$

oder ausgerechnet, wobei die in [] gesetzten Zahlen BRIGGSsche Logarithmen bedeuten, denen — 10 hinzuzufügen ist:

$$\begin{aligned} y = 1 &- [9,221\ 8487]\,(qx)^2 + [8,318\ 7587]\,(qx)^4 \\ &- [7\cdot 394\ 4795]\,(qx)^6 + [6,457\ 9657]\,(qx)^8 \\ &- [5\cdot 514\ 1774]\,(qx)^{10} + [4\cdot 565\ 5551]\,(qx)^{12} \\ &- [3\cdot 613\ 4843]\,(qx)^{14} + [2\cdot 658\ 8288]\,(qx)^{16} \\ &- [1\cdot 702\ 1637]\,(qx)^{18} + [0\cdot 743\ 1033]\,(qx)^{20} \end{aligned} \quad (76)$$

Die Grenzbedingung $y = 1$ für $x = 0$ ist hierin bereits berücksichtigt. Obwohl nun die Coëfficienten rasch abnehmen und selbst abwechselnde Vorzeichen besitzen, ist die Convergenz wegen des ziemlich grossen Werthes von q^2 doch eine sehr langsame, so dass q aus der Bedingung $y = 0$ für $x = 1$ auch nicht annähernd berechnet werden könnte. Die Anfangsglieder dieser Beziehung sind übrigens nach (74)

$$0 = 1 - \frac{q^2}{3!} + \frac{n}{5!}q^4 - \frac{1}{7!}\left(n^2 + \frac{5!}{2(3!)^2}n(n-1)\right)q^6 - \cdots \quad (77)$$

und die Reihe für y^n wird der Gleichung (73) zu folge:

$$\begin{aligned} y^n = 1 &- \frac{5}{2\cdot 3!}(qx)^2 + \frac{5}{2\cdot 4!}(qx)^4 - \frac{5^4}{3!\,7!}(qx)^6 + \frac{5^2\cdot 1252}{4!\,9!}(qx)^8 \\ &- \frac{5^3\cdot 21\,984}{5!\,11!}(qx)^{10} + \frac{5^4\cdot 4\,330\,464}{7!\,13!}(qx)^{12} \\ &- \frac{5^5\cdot 26\,150\,368}{7!\,15!}(qx)^{14} + \cdots \end{aligned} \quad (78)$$

Die Berechnung weiterer Coëfficienten wird durch die Anwendung des Polynomsatzes sehr erschwert. Man erhält aber eine sehr einfache Recursionsformel durch Benutzung der Gleichung (42) Differenziert man diese logarithmisch, so kommt

$$z\frac{d^3z}{dx^3} - n\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{n-1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}z = 0,$$

woraus man für den Coëfficienten von (qx) zu folgender Reductionsformel gelangt:

$$\begin{aligned} &(2i-2)\,2i\,(2i+1)\,a_{2i} + (0\cdot 2\cdot 3\cdot + (2i-4)\,(2i-2)\,(2i-1) \\ &\quad - 2\,((2i-1)\,(2i+1) - 3)\,n)\,a_{2i-2}\,a_2 \\ &\quad + (2\cdot 4\cdot 5 + (2i-6)\,(2i-4)\,(2i-3) \\ &\quad - 4\,((2i-3)\,(2i+1) - 5)\,n)\,a_{2i-4}\,a_4 \\ &\quad + (4\cdot 6\cdot 7 + (2i-8)\,(2i-6)\,(2i-5) \\ &\quad - 6\,((2i-5)\,(2i+1) - 7)\,n)\,a_{2i-6}\,a_6 + \cdots = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Ist in dem letzten Gliede a_{2i-2u} und a_{2u} gleich, so erhält dieses den Factor $\frac{1}{2}$. Die Rechnung mit dieser Formel ist sehr einfach, da die Zahlenfactoren stets wiederkehren.

A. Ritter*, der wohl zuerst die Gleichung (30) aufstellte, integriert sie graphisch und erhält für $n = 2\frac{1}{2}$ die folgenden Werthe:

$x =$	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
$y =$	1·000	0·953	0·827	0·670	0·513	0·376	0·264	0·174	0·102	0·046	0·000
$y^n =$	1·000	0·887	0·622	0·367	0·188	0·0867	0·0358	0·0126	0·00332	0·000454	0·0
$y_1 =$	∞	1·337	0·531	0·309	0·211	0·156	0·123	0·100	0·0836	0·0714	0·062

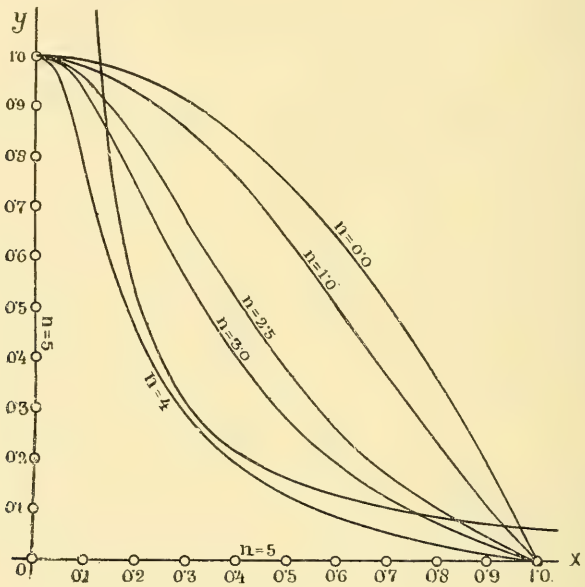


Fig. 3.

Temperaturcurven isentroper Gaskugeln.

Hier bezieht sich die letzte Reihe auf das singuläre Integral (44), welches mit dem aus den Zahlenwerthen für y folgenden Werthe $q = 5{\cdot}36$ berechnet ist. Die beiden Integrale haben in dem Punkte $x_1 = 0{\cdot}138$ und $x_2 = 0{\cdot}849$ den gleichen Werth $y_1 = 0{\cdot}925$ und $y_2 = 0{\cdot}075$ und im Punkte $x = 0{\cdot}275$ gemeinsame Tangente.

* Ann. d. Phys. u. Chem. 1880. Bd. XI. pag. 338.

Die aufgeschriebenen Werthe genügen, um daraus genauere Resultate ableiten zu können. So kann die Gleichung

$$y = 1 - x$$

Fig. 4.
Gravitationscurven isentroper Gaskugeln.

als eine erste, wenn auch sehr rohe Annäherung dienen. Schreibt man das Integral von (30) in der Form

$$y = A - \frac{q^2}{x}\int dx \int x y^n dx,$$

so kann eine jede Näherung benutzt werden, um einen weiteren Näherungsausdruck zu finden. Der eben gegebene Ausdruck und die Annahme $n = 4$ führen RITTER zu der Interpolationsformel

$$y = 1 - 7x^2 + 14x^3 - 12 \cdot 6\,x^4 + 5 \cdot 6\,x^5 - x^6,$$

welche einen bis zu 2% sicheren Anschluss gewährt. Etwa drei Decimalen sicher erhält man durch die Formel

$$y = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^{3 \cdot 137 - 1 \cdot 940\,x}.$$

Die Figur 3 giebt nach RITTER die Integrale der Zustandsgleichung für $n = 0$, 1, $\frac{5}{2}$, 3, 4 und 5, weiter das singuläre Integral für zweiatomige Gase. In Figur 4 sind die relativen Schwerebeschleunigungen im Innern des Körpers für dieselben Fälle veranschaulicht. Beidemale bildet $n = 5$ einen Ausnahmefall; dort geht nämlich die Curve in die Coordinatenaxen über, hier zerfällt sie in die Ordinatenaxe und die die Anziehung eines äussern Punktes darstellende NEWTON'sche Curve.

Die Variabelen des Spectrums.

Schreibt man das Spectrum des absolut schwarzen Körpers in der Form:

$$e = \frac{4}{\pi D}\, m^4 \theta^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + m^2)^2},$$

und bedenkt man, dass allgemein die Beziehung

$$m\theta = m_0 \theta_0$$

stattfindet, so kann in (10) wegen (35) einfach

$$e = \frac{4}{\pi D}\,(m_0\theta_0)^4 \frac{\lambda^2 y^4}{(\lambda^2 y^2 + m_0^2)^2} \quad \ldots \quad (80)$$

geschrieben werden, wobei sich die mit dem Index o versehenen Grössen auf die Oberfläche des Kernes, beziehentlich auf den Mittelpunkt der Gaskugel beziehen.

Ebenso einfach lässt sich auch der Absorptionscoëfficient ausdrücken. Da man es mit isentropen Körpern zu thun hat, so ist nach den in der Einleitung gegebenen Gleichungen $\frac{\mu}{m}$ im Innern der Gaskugel durchaus constant, so dass

$$\mu = \frac{m}{m_0}\mu_0 = \frac{\mu_0}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

gesetzt werden kann. Man hat also

$$\alpha = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = \frac{\mu_0^4}{m_0^4}\left(\frac{\lambda^2y^2+m_0^2}{\lambda^2y^2+\mu_0^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

und dem gemäss

$$1-\alpha = \left(1-\frac{\mu_0^2}{m_0^2}\right)\left(\left(1+\frac{\mu_0^2}{m_0^2}\right)\lambda^2y^2 + 2\mu_0^2\right)\frac{\lambda^2y^2}{(\lambda^2y^2+\mu_0^2)^2}. \quad (83)$$

Alle mit dem Index o versehenen Grössen sind als constant zu betrachten, und die Wellenlänge kommt stets in der Verbindung (λy) vor.

Diese Ausdrücke sollten nun nach Potenzen von y entwickelt werden, worauf y durch seinen Reihenwerth zu ersetzen wäre, was zu ganz unabsehbaren Verwickelungen führt. Hiezu kommt noch, dass es keine Entwickelung nach y giebt, die für alle Wellenlängen convergent bliebe, so dass eine solche für jeden bei der Beobachtung benutzten Spectralbezirk gesondert vorgenommen werden muss. Es ist also jedenfalls gerathen nicht y, sondern λy als unabhängige Veränderliche zu betrachten.

In jedem Elemente des Integrals spielt das Radical

$$\sqrt{n^2r^2-\gamma^2} = r_1\sqrt{n^2x^2-\frac{\gamma^2}{r_1^2}}$$

eine besondere Rolle, insoferne es nicht ausgeschlossen ist, dass dieses in einzelnen Kugelschalen imaginär werde.*

Ist n_0 der Brechungsindex im Mittelpunkte der Gaskugel oder auf der Oberfläche des festen Kernes, so hat man nach dem NEWTON'schen Satze:

$$n^2-1 = (n_0^2-1)\frac{s}{s_0} = (n_0^2-1)y^n \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

und dem zufolge

$$N = n^2x^2 = x^2 + (n_0^2-1)x^2y^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die Curve der nx beginnt in dem Punkte $x=0$ mit dem Werthe 0, wächst sodann stetig, nimmt an der Oberfläche des Weltkörpers, wo der Brechungsindex, wie im ganzen leeren Raume 1 ist, den Werth 1 an, und bleibt von da an mit x identisch,

* O. KNOPF; Die SCHMIDTsche Sonnentheorie u. s. w. Jena 1893.

nähert sich also einer die Coordinatenaxen unter dem Winkel von 45^0 schneidenden Geraden, kann jedoch innerhalb des Himmelskörpers ein oder mehrere Maxima annehmen.

Der tiefste Punkt eines jeden im Körper verlaufenden Lichtstrahles (z. B. P in Fig. 7) berührt die Oberfläche einer Kugel vom Radius (r). Für einen jeden Punkt dieses Strahles ist also, da $e = 0$ ist, $(n)(r) = \text{const.}$ Schneidet er also die durch den Punkt M gehende Kugelschale unter dem Winkel ε, so hat man

$$(n)(r) = nr \cos \varepsilon,$$

und da nr mit r fortwährend wächst, so ist

$$nr > (n)(r),$$

so dass das Radikal immer reell bleibt. Besitzt also die Curve der nx kein Minimum, so gelangt ein jeder in jedem beliebigen

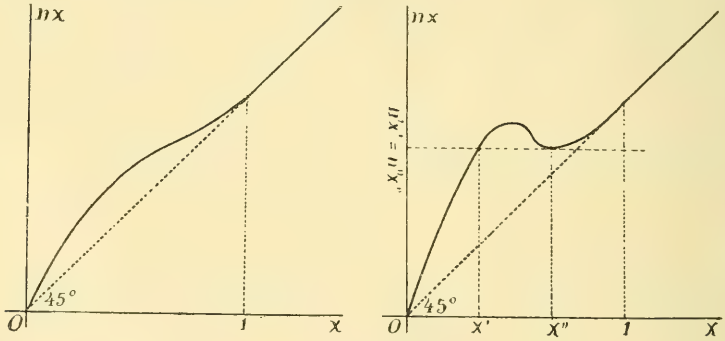


Fig. 5.
Verschiedenes Verhalten der nx-Curven.

Punkte der Gasmasse entstehende Lichtstrahl in den äusseren Raum, und kann daher auch das Auge erreichen.

Besitzt aber die Curve der nx (wie in der zweiten Fig. 5) bei x'' ein Minimum (es lässt sich leicht beweisen, dass dem isentropen Zustande höchstens *ein* Maximum und Minimum entspricht), so musste diesem bei einem kleineren x' ein Maximum vorangehen, so dass die Curve auch im aufsteigenden Aste einmal den Werth $n''x''$ erreichen musste. Es ist also

$$n'x' = n''x'',$$

jedoch für jedes x, das der Ungleichung

$$x'' > x > x'$$

entspricht:

$$nx > n''x''.$$

Daraus folgt aber, dass die Lichtstrahlen, welche zwischen x' und x'' gelegene Kugelschalen tangentiell verlassen, aus der Kugel gar nicht treten können. Denn sollte ein Strahl die Schale x'' unter dem Winkel ε'' verlassen, so müsste

$$nx \cos O = n''x'' \cos \varepsilon''$$

sein, was aber wegen $nx > n''x''$ nicht möglich ist. Innerhalb der Kugelschale $x'x''$ bleibt also das Radical imaginär.

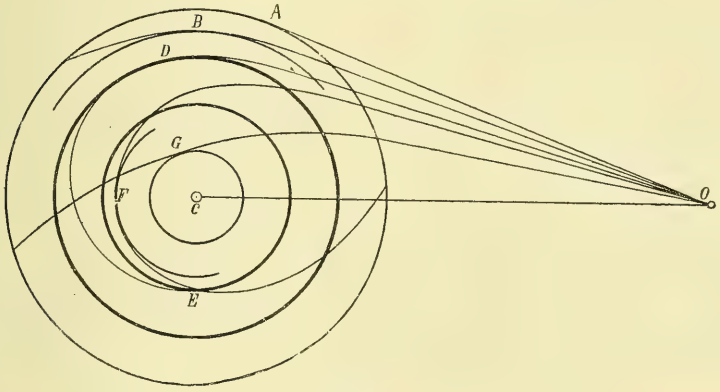


Fig. 6.

Strahlengang im Innern einer leuchtenden Gaskugel.

Da $n''x'' = n'x'$ ist und dieses nach (3) mit $\frac{R}{r_1} \sin \psi$ identisch ist, so gelangen die, die Schalen x' und x'' streifend verlassenden Lichtstrahlen (für welche $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ ist), unter demselben Gesichtswinkel in's Auge, fallen mithin zusammen. Das Bild der innern Kugel, für welche $x < x'$, grenzt also unmittelbar an das der äusseren, für welche $x > x''$ ist, während der Schale $x'x''$ ein besonderes Bild nicht entspricht.

Am bequemsten verfolgt man den Strahlengang, wenn man (Fig. 6) vom Auge O ausgeht. Der äusserste Strahl OA, der die äussere Oberfläche eben berührt, schliesst mit der Axe CO einen dem scheinbaren Halbmesser gleichen Winkel ein. Einem etwas

kleineren Winkel ψ entspricht ein Strahl OB, der eine tiefer gelegene Kugel berührt. Der Strahl selbst ist um den an den Berührungspunkt gezogenen Radius symmetrisch, und dessen in der Kugel gelegener Bogen ist zugleich die Gesammtheit aller jener Punkte, von denen Licht ins Auge gelangen kann. Alle diese Strahlen können in tiefer gelegene Schichten als x'' nicht eintreten, doch wird die Krümmung des Strahles mit Annäherung an diese Kugelschale grösser.

Derjenige Strahl, welcher die Schale $x = x''$ berührt, und dem der Gesichtswinkel ψ'' entspricht, wird circular gebrochen und geht im Kreise herum. Für ihn ist sowohl in den höher als tiefer gelegenen Schichten nx grösser als $n''x''$, und daher kann die Schale in keiner Richtung verlassen werden. Ist der Gesichtswinkel des Strahles nur um ein unendlich kleines geringer, als ψ'', so dringt er in die Schale x'' ein, schneidet die tiefer gelegenen Schichten unter spitzen Winkeln, die aus $nx \cos \varepsilon = n''x''$ zu berechnen sind, und erreicht schliesslich die Schale x', die er wegen $n'x' = n''x''$ ebenfalls asymptotisch berührt. Die Schalen x' und x'' sind in der Figur stärker ausgezogen.

Strahlen mit geringerem Gesichtswinkel als ψ'', z. B. OF oder OG, dringen ganz in das Innere der Gasmasse ein, schneiden aber die beiden Schalen x' und x'' wegen der Beziehung $n'x' = n''x''$ unter gleichen Winkeln. Der Radius jener Kugel, welche der Strahl berührt, kann nach (3) aus

$$nx = n''x'' \cos \varepsilon'' = \frac{R}{r_1} \sin \psi$$

für jedes gegebene ψ berechnet werden.

Es ist bekannt, welche Schlussfolgerungen SCHMIDT aus diesen Betrachtungen für die Natur der Sonne gezogen hat. Gründe für eine nur *scheinbar* scharfe Begrenzung der Sonnenscheibe hat aus rein wärmemechanischen Principien auch RITTER gegeben. Zu bedenken ist jedoch, dass das Volumen eines Himmelskörpers nicht willkürlich über eine gewisse Grenze hinausgenommen werden kann, da ja die Constanz der Grösse q^2 fordert, dass die Abmessungen eines gasförmigen Himmelskörpers stets durch den physikalischen Zustand des Gases beschränkt bleiben. Es bliebe zu untersuchen, ob diese Thatsachen nicht die Wahrscheinlichkeit des KANT-LAPLACE'schen Urnebels in Frage ziehen.

Jetzt bereitet das Radical

$$r_1 \sqrt{n^2 x^2 - \frac{\gamma^2}{r_1^2}}$$

keine Schwierigkeiten mehr, selbst nicht im mittleren Theile der Kugel, nur muss die Integration nach x geeignet angeordnet werden.

Da der Lichtstrahl im Innern der Kugel symmetrisch verläuft, so kann das Integral (10) geeignet transformiert werden.

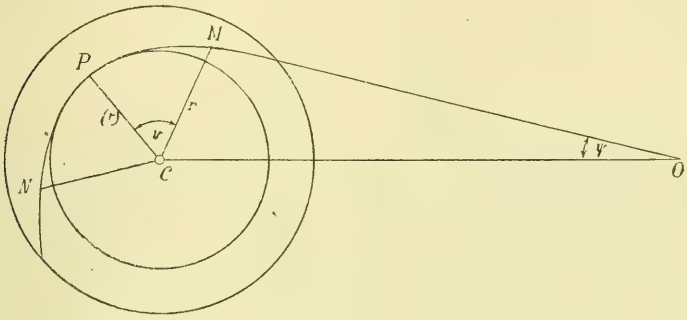


Fig. 7.

Elementarintensität einer leuchtenden Gaskugel.

In den um den Berührungspunkt P (Fig. 7) symmetrisch gelegenen Punkten M und N ist die Intensität dieselbe, jedoch entspricht derjenigen in N eine grössere Extinction. Die Intensität im Punkte M ist daher mit einer Potenz von e zu multiplicieren, deren Exponent ist

$$\int_1^x \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}}, \quad \cdots \quad (86)$$

während der Exponent des e-Factors in N

$$\int_1^{(x)} \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}} + \int_{(x)}^x \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}} \quad (87)$$

ist, wenn unter (x) die Wurzel der Gleichung

$$nx = \frac{R}{r_1} \sin \psi \quad \cdots \quad (88)$$

verstanden wird. Ausserdem mag noch der vom Berührungspunkt aus gezählte Polarwinkel eingeführt werden, der durch

$$v = \int_{r}^{(r)} \frac{\gamma\, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - \gamma^2}} = \frac{R}{r_1} \sin\psi \int_{x}^{(x)} \frac{dx}{x\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R_1^2}{r_1^2}\sin^2\psi}} \quad (89)$$

gegeben ist.

Demzufolge wird die Gleichung (10) etwas einfacher:

$$J = -2\pi \int_{v}^{\psi_1} \int_{0}^{\varsigma} r \sin v\, e\, l \cdot (1-\alpha)\, e^{\int_{1}^{(x)} l\cdot(1-\alpha)\,d\varsigma} \left(e^{\int_{(x)}^{x} l\cdot(1-\alpha)\,d\varsigma} + e^{-\int_{(x)}^{x} l\cdot(1-\alpha)\,d\varsigma} \right) d\varsigma\, dr. \quad \cdots \quad (90)$$

Die Symmetrie hört natürlich in Himmelskörpern mit centralem Kerne für alle x auf, welche kleiner als x_0 sind, daher innerhalb des Kernes zu liegen kommen. In der zwischen Kern und Auge gelegenen Gasschichte gehört aber zu jedem ς nur ein einziges x, was die Rechnung erleichtert.

Mit den beiden asymptotischen Strahlen braucht nicht besonders gerechnet zu werden, da diese, wegen $\lim \varsigma = \infty$, das Spectrum des absolut schwarzen Körpers geben.

Ob endlich circulare Refraction vorhanden ist, das lässt sich erst entscheiden, wenn y als Function von x gegeben ist. Dürfte man von dem singularen Integrale ausgehen, so wäre das Minimum der Gleichung (85) durch

$$(x) = 7 \cdot 12\,(n_0^2 - 1)^{\frac{3}{10}}$$

gegeben, Circularrefraction wäre also vorhanden, sobald

$$1 < n_0^2 < 1{,}001\,440$$

wird.

Viel grössere Brechungsindices fordert die für y gegebene Zahlenreihe. Schreibt man kurz für

$x=$	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9:
$z=$	1·554	0·688	0·071	−0·172	−0·185	−0·132	−0·077	−0·035	−0·010,

so kommt

$$N' = x\,(2 + (n_0^2 - 1)\,z).$$

Ein Minimum kann daher nur für $x > \frac{1}{3}$ erwartet werden und beansprucht wenigstens einen Brechungsindex $n_0^2 > 17$. Da in

gasförmigen Weltkörpern nach Gleichung (37) die Mittelpunktsdichte etwa 22mal so gross ist, als die mittlere Dichte, so muss der mittlere Brechungsindex bei der Möglichkeit circularer Refraction mindestens $1 \cdot 314$ sein. Unter Zugrundelegung der RITTER'schen Interpolationsformel findet man für die Stelle des Minimums:

$$(1 - x'')^4 - \tfrac{2}{3}(1 - x'')^3 + \frac{1}{3(n_0^2 - 1)} = 0.$$

Die Unbekannten des Spectrums.

1) Für ihrer ganzen Masse nach gasförmige Weltkörper ist q^2 schon im Vorhinein bekannt, y enthält daher keine neue Unbekannte. Die Kenntniss des absolut schwarzen Körpers und der Absorption setzen voraus, dass m_0 und μ_0 bekannt seien. m_0 gibt zugleich die absolute Temperatur θ_0 und beide zusammen die Constante der Entropie, da ja $[S]$ durch jene des schwarzen Körpers ausgedrückt werden kann, also von stofflichen Beschaffenheiten unabhängig ist. Hiermit ist dann auch der centrale Druck und die Dichtigkeit gegeben, und da y bekannt ist, sind diese Zustandsvariabeln für jeden Punkt der Gaskugel bestimmt. Mit Hülfe der Gleichung (40) ergiebt sich sodann r_1, der Halbmesser des Körpers, was ein jedenfalls unerwartetes Resultat ist. Da es sich hier um genügend genau bestimmbare Grössen handelt, so ist die Berechnung scharf und führt mit den vorher bestimmten Werthen auch zur Kenntniss der Masse des Sternes. Diese Resultate sind unmittelbar verwendbar, wenn es sich um planetarische Nebel handelt. Da deren scheinbarer Halbmesser bekannt ist, so gelangt man hierdurch zu einer angenäherten Kenntniss der Entfernung. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Die kugelförmigen Sternhaufen, welche jenseits unseres Sternsystems fallen, können mit einiger Annäherung als kugelförmige Gasmassen betrachtet werden, insoferne die einzelnen Sterne zu den gegenseitigen Abständen in demselben Grössenverhältnisse stehen, wie die Molekelen zu den intermolekularen Räumen. Auch für die mittleren Bewegungen bestehen in beiden Systemen gewisse Analogien. Da auch die scheinbaren Halbmesser dieser Gebilde bekannt sind, so kann man vielleicht schon mit den heutigen

Hülfsmitteln zu einer Abschätzung ihrer Entfernung gelangen. Es wäre nicht der erste Fall, dass die Spectralanalyse eine rein astronomische Frage gelöst hätte.

Das Gesetz von BOYLE-GAY-LUSSAC giebt nun mit den Werthen s_0, θ_0, p_0 die den mittleren Stoff charakterisierende Constante R.

Ausserdem ist die Kenntniss von n_0, des Brechungsindex im Mittelpunkte der Kugel erforderlich. Möglicher Weise kann diese Grösse als vorhinein gegeben betrachtet werden, insofern die chemische Zusammensetzung des Stoffes, sowie dessen Charakteristik R schon bekannt ist. Weiter kommen in den Gleichungen noch R und ψ_1, Entfernung und scheinbarer Halbmesser vor, von denen jedoch, da zwischen ihnen die Gleichung (11) besteht, nur eine als unbekannt betrachtet zu werden braucht. Doch kann auch diese noch eliminiert werden, insofern die Gleichung (10), falls die Parallaxe des Sternes nicht bekannt wäre, zu einer ganz neuen Beziehung führt.

Denkt man sich nämlich J als Function von λ hingeschrieben, so liefert die Substitution $J = \iota$, in welcher ι unendlich klein, sonst aber beliebig ist, eine Gleichung in λ, die wenigstens zwei reelle Wurzeln besitzt. Die dem brechbareren Ende des Spectrums angehörende Wurzel λ_1 ist dem DRAPER'schen Gesetze nach von stofflichen und Oberflächenbeschaffenheiten des Sternes unabhängig, daher identisch mit dem Ende des einfachen Spectrums, das mit dem Sterne gleicher Temperatur angehört. Sind also μ, A die Elemente eines beliebigen Spectrums von der mittleren Temperatur des Sternes, und λ_1 die Wurzel der besagten Gleichung, dann hat man

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\iota}\sqrt{\frac{\mu^3}{A}}, \quad \cdots\cdots \quad (91)$$

aus welcher beiderseits die Grösse ι herausfällt, wenn man, was wegen der unendlichen Kleinheit von ι gestattet ist, nur die erste Potenz derselben berücksichtigt. Diese Gleichung führt ohne neue Beobachtung zur Kenntniss von ψ_1 oder R, so dass als einzige Unbekannte m_0, μ_0 und höchstens n_0 verbleiben. Drei Spectralbeobachtungen verschiedener Wellenlängen führen daher zur vollständigen Lösung des Problems.

2. Verwickelter wird die Sachlage, wenn ein Himmelskörper mit centralem Kerne vorliegt. Dann ist q^2 unbekannt, und y tritt als Funktion von x, x_0 und q^2 auf. Zu den früheren Unbekannten treten also noch x_0 und q^2. m_0 und μ_0 ergeben auch jetzt die Entropie und hiemit die auf der Oberfläche des Kernes herrschenden Elemente θ_0, s_0, p_0, so dass die Constante des Gasgesetzes wieder bekannt wird. Für die unterste Gasschichte ist natürlich auch n_0 anzugeben.

An der Oberfläche des festen Körpers muss μ_0, h gegeben sein, und ausserdem kommen, wie früher, auch die Grössen r_1, ψ_1 und R vor, zwischen denen jedoch die Gleichung (11) besteht, so dass die volle Anzahl der Unbekannten 9 beträgt. Diese Zahl kann auf 7 beschränkt werden, insofern (34) eine Beziehung zwischen r_1, s_0 und θ_0 liefert und die Drapersche Gleichung auch für diesen Fall besteht.

Da aber die Gase schon bei verhältnissmässig kleinen Drucken ein dem absolut schwarzen Körper nahestehendes Spectrum bilden, so kann noch für die Oberfläche des Kernes $\mu_0' = m_0$ und $h = 0$ gesetzt werden, selbst wenn im Grenzfalle der Kern als Gas betrachtet wird. m_0 ist dann wegen der Identität der Grenzflächen dasselbe Element, welches sich auf die unterste Schichte des Gases bezieht. Die Anzahl der wesentlich Unbekannten ist somit auf 5 reduciert. Im Falle circulare Refraction auftritt, kommen zwar auch die Radien x' und x'' vor, diese sind aber keine neuen Unbekannten, insoferne sie als Minimum und Maximum der Gleichung (85) gegeben sind.

Durch höchstens sechs spectrophotometrische Messungen lässt sich daher das Spectrum eines jeden Fixsternes darstellen, wobei zugleich die Frage Erörterung findet, ob der Stern einen centralen Kern besitze oder nicht.

Diese Resultate sind in vielen Punkten rein formal, weisen aber doch auf die Ziele hin, welche bei der Beobachtung besonders vor Augen gehalten werden sollten. Die eigentlichen Rechnungen bieten nunmehr bloss technische Schwierigkeiten.

10.

UEBER DIE AXENDREHUNG DER FIXSTERNE.

Von R. VON KÖVESLIGETHY,
corr. Mitglied d. ungar. Akademie d. Wiss.

Vorgetragen in der Sitzung der ungar. Akademie 23. Oktob. 1899.

Aus „Math. és Természettud. Értesitö" (Math. und Naturwiss. Anzeiger) Band XVII. pag. 573—588.

Die spectrophotographische Beobachtung der Fixsterne gewährt heutzutage eine Genauigkeit, welche es bereits erlaubt, selbst die Frage nach der Rotationsbewegung dieser Himmelskörper in das Bereich der Untersuchung zu ziehen. ABNEY wies zuerst im Jahre 1877 darauf hin, dass in Folge einer solchen Bewegung sämmtliche Linien des Spectrums beiderseits gleichförmig verwaschen erscheinen müssten, doch war die Erklärung — wie ursprünglich beabsichtigt — auf die Sterne des Typus I.a., in deren Spectren neben sehr feinen Metalllinien nur die Wasserstofflinien verbreitert erscheinen, nicht anwendbar. Solange es sich nur um visuale Beobachtungen handelte, schien jedoch das Spectrum der Sterne vom Typus I.b. sich dieser Erklärung zu fügen, insofern die wenigen Linien dieses Typus genügend gleichförmig erbreitert erscheinen. Wollte man demnach das Spectrum von α Cygni, welches der Annahme ABNEY's noch am ehesten entspricht, auf diese Weise erklären, so müsste einem Aequatorpunkte des Sternes eine Secundengeschwindigkeit von 25 km zuertheilt werden.

Aus den erstaunlich genauen Spectrogrammen der Potsdamer Sternwarte konnte H. C. VOGEL* mit einiger Wahrscheinlichkeit

* Sitzber. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1898. 17. Nov. p. 725.

behaupten, dass α Aquilae, und vielleicht ebenso β und δ Leonis und β Cassiopeiae mit Axendrehung begabte Sterne seien, deren Aequatorebene nahezu in die Gesichtslinie falle. Jede Linie im Spectrum des Altair, das übrigens demjenigen der Sonne ziemlich gleicht, ist der ABNEY'schen Hypothese entsprechend erbreitert, so zwar, dass die enger stehenden Linien zu ganzen Banden sich vereinigen. Der Gedanke, dass diese Wirkung einem nahestehenden Begleiter zugeschrieben werden könnte, mit welchem Altair einen spectroscopischen Doppelstern bildet, muss hier zurückgewiesen werden, da die Linienerbreiterung keine Spur von Periodicität aufweist, welche doch nicht fehlen dürfte, wenn es sich um Bewegungen des hellen Sternes um den Schwerpunkt eines zusammengesetzten Systemes handelte.

Zur Zeit ist es zwar noch nicht möglich, aus der Erbreiterung der Linien einen genauen Werth der Rotationsgeschwindigkeit abzuleiten, doch kann diese Grösse nach VOGEL wenigstens der Ordnung nach geschätzt werden. Im Spectrum der Sonne, welchem dasjenige von Altair — wie erwähnt — nahe gleich ist, beträgt das durchschnittliche Linienintervall in dem violetten Theile 0,04 $\mu\mu$. Bei gleichförmiger Vertheilung der Linien genügte daher eine Geschwindigkeit von 13,5 km, um beiderseits gegenseitige Berührung der Linien, und hiermit Bandenbildung hervorzurufen. Da jedoch die Ränder der Linien ausnehmend lichtschwach und daher schwer zu beobachten sind, so kann angenommen werden, dass bei der genannten Geschwindigkeit die Berührung noch nicht constatiert werden könnte. Das Ineinanderfliessen der Linien wird aber zweifellos beobachtet werden können, wenn man für die Geschwindigkeit den doppelten Werth, also etwa 27 km pro Secunde annimmt.

Diese Geschwindigkeit des Altairäquators könnte nun die Eigenthümlichkeit seines Spectrums erklären; sie ist 13mal so gross, als jene der Sonne, und 2mal so gross, als die Rotationsbewegung des Jupiters, also noch immer innerhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeit gelegen.

Angesichts dieser Beobachtungsdaten schien es interessant, auch die theoretische Seite der Frage zu untersuchen, die sich mir übrigens schon früher aufdrängte, als ich das Spectrum ruhen-

der Fixsterne studierte, die ich aber, als noch lange nicht zeitgemäss, wieder fallen lassen zu dürfen glaubte.

Wir denken uns einen gasförmigen, sphäroidischen Himmelskörper, der mit Axendrehung begabt, sonst aber äusseren Kräften nicht unterworfen ist. Im Mittelpunkte desselben nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen Z-Axe mit der Drehungsaxe, dessen XY Ebene mit der Aequatorebene zusammenfällt. Der Weltkörper mag entweder seiner ganzen Masse nach gasförmig sein, oder aber er kann centralen Kern besitzen, der — wie bei den Planeten — dichter, oder der — wie bei manchen Nebelflecken — weniger dicht ist, als die umgebende Gashülle. Jedenfalls mag aber — obgleich nur wegen Vereinfachung der Rechnung — angenommen werden, dass der Körper barycentrisch sei. Wesentlich ist diese Einschränkung nicht, doch aller Wahrscheinlichkeit nach genügend begründet, insofern nach Analogie der Sonne Fixsterne mit grosser Abplattung kaum zu erwarten sind.

Unter diesen Voraussetzungen sei g_1 und g die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche des Sternes und der Erde, u das Verhältniss der Schwere in der Entfernung r vom Centrum des Sternes und an dessen Oberfläche. Sei s weiter die Schwere des Stoffes per Volumeneinheit an der Erdoberfläche gemessen und p der Druck, beide in der Entfernung r vom Sterncentrum. Bedeutet noch ω die Winkelgeschwindigkeit, also

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo T die Dauer der Axendrehung ist, so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{s}{g}\left(g_1 u \frac{x}{r} - \omega^2 x\right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{s}{g}\left(g_1 u \frac{y}{r} - \omega^2 y\right) \quad \ldots \ldots \quad (2) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{s}{g} g_1 u \frac{z}{r}, \end{aligned}$$

und nach dem NEWTON'schen Gesetze für barycentrische Körper:

$$u = \frac{m r_1^2}{M r^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

falls m die in der Kugel vom Radius r, M die ganze, in der Vollkugel mit dem Radius r_1 enthaltene Masse bezeichnet.

Differenziert man das Gleichungssystem (2) und eliminiert man mittels (3) und den hieraus abzuleitenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{xs}{r} - \frac{2x}{r^2}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{ys}{r} - \frac{2y}{r^2}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{zs}{r} - \frac{2z}{r^2}u$$

sowohl u, als dessen Differentialquotienten, so gelangt man zu dem folgenden System:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(3\frac{x}{r^2} - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{g}\left(\frac{4\pi r_1^2 g_1}{M}s^2 - 3s\omega^2\right)\frac{x^2}{r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(3\frac{y}{r^2} - \frac{1}{y}\right)\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{g}\left(\frac{4\pi r_1^2 g_1}{M}s^2 - 3s\omega^2\right)\frac{y^2}{r^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(3\frac{z}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{Mg}s^2\frac{z^2}{r^2} = 0.$$

Da hier ausser p auch s als unabhängige Variabele vorkommt, so bestimmt der mechanische Gleichgewichtszustand nicht zugleich auch den thermischen; der letztere kann vielmehr noch ganz willkürlich gewählt werden. Setzt man $\omega = 0$, so zieht sich das Gleichungssystem in eine einzige Gleichung zusammen, die bereits bei früherer Gelegenheit gegeben wurde. (pag. 139.)

Die Integration der vorliegenden Gleichungen kann erst bewerkstelligt werden, wenn ein Zusammenhang zwischen p und s gegeben ist, das heisst, wenn der thermische Zustand des Weltkörpers bekannt ist. Während also das bloss durch das System (4) gegebene mechanische Gleichgewicht auf unendlich viele Arten befriedigt werden kann, gibt es nur ein Gleichgewicht, welches auch in thermischem Sinne als solches betrachtet werden darf.

Auf Grund der in der angezogenen Abhandlung dargelegten Schlüsse kann der Gleichgewichtszustand auch in diesem Falle als isentrop bezeichnet werden. Dann bestehen die POISSON'schen Gleichungen:

$$p = p_0\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{n+1} \quad \text{und} \quad s = s_0\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{k-1} = n. \quad (5)$$

Hierbei beziehen sich die mit dem Indexe 0 versehenen Grössen auf den Mittelpunkt des Weltkörpers, oder — falls ein centraler Kern vorhanden wäre — auf die Oberfläche dieses Kernes. θ ist die absolute Temperatur, und $k = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der specifischen Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen.

Mit Hülfe dieser Gleichungen berechnet sich die absolute Temperatur im Punkte (x, y, z) aus dem Systeme:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \left(3\,\frac{x}{r^2} - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \left(\frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\,\theta^n - \frac{3\omega^2}{c_p g}\right)\frac{x^2}{r^2} = 0\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \left(3\,\frac{y}{r^2} - \frac{1}{y}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \left(\frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\,\theta^n - \frac{3\omega^2}{c_p g}\right)\frac{y^2}{r^2} = 0 \qquad (6)\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \left(3\,\frac{z}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\,\theta^n\,\frac{z^2}{r^2} = 0.
\end{aligned}$$

Es ist jedoch einfacher, relative Maasse einzuführen; sei also

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \vartheta; \quad \frac{x}{r_1} = \xi; \quad \frac{y}{r_1} = \eta; \quad \frac{z}{r_1} = \zeta; \quad \frac{r}{r_1} = \varrho, \qquad (7)$$

so gelangt man zu folgendem definitiven Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + \left(3\,\frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} + \left(q^2\vartheta^n - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g\theta_0}\right)\frac{\xi^2}{\varrho^2} = 0\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + \left(3\,\frac{\eta}{\varrho^2} - \frac{1}{\eta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} + \left(q^2\vartheta^n - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g\theta_0}\right)\frac{\eta^2}{\varrho^2} = 0 \qquad (8)\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} + \left(3\,\frac{\zeta}{\varrho^2} - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} + q^2\vartheta^n\,\frac{\zeta^2}{\varrho^2} = 0,
\end{aligned}$$

in welchem ebenso, wie in der bereits citierten Abhandlung

$$q^2 = \frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mgp_0}, \qquad (9)$$

was auch in die Form

$$q^2 = \frac{4\pi(k-1)a^2}{kE}\cdot\frac{r_1^2 s_0^2}{p_0} \qquad (9')$$

gebracht werden kann, worin E die Masse, a den mittleren Radius der Erde bedeutet.

Das Gleichungssystem (8) kann bei allgemein belassenem n nicht integriert werden; nur die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $n = 5$ geben geschlossene Integrale, wobei sich jedoch der letztere Fall

auf die Zusammenschrumpfung des Weltkörpers in einen einzigen Punkt bezieht.

Die auftretenden Verhältnisse lassen sich jedoch schon ganz klar durch die Behandlung der Fälle $n = 0$ und $n = 1$ überblicken.

I. Ist $n = 0$ oder $k = \infty$, was im Sinne der POISSON'schen Gleichungen einem isopleren oder homogenen Weltkörper entspricht, so lautet die Lösung der Gleichungen (8):

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= A + \frac{B}{\varrho} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\xi^2, \\ \vartheta_\eta &= C + \frac{D}{\varrho} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\eta^2, \quad \cdots \quad (10) \\ \vartheta_\zeta &= E + \frac{F}{\varrho} - \tfrac{1}{6} q^2 \zeta^2, \end{aligned}$$

in welchen die Indices ξ, η, ζ auf die längs der betreffenden Axen gemessene relative Temperatur hinweisen. Die Grössen $A, B, \ldots F$ bezeichnen die nöthige Anzahl willkürlicher Constanten, deren Bestimmung wesentlich davon abhängt, ob der Weltkörper centralen Kern besitzt oder nicht.

Ist ein fester oder flüssiger Kern oder entsprechender Hohlraum nicht vorhanden, so ist die centrale Temperatur θ_0, die relative Temperatur des Mittelpunktes, also eins. Man hat daher:

$$\vartheta = 1 \quad \text{für} \quad \xi = \eta = \zeta = 0, \quad \text{also auch für} \quad \varrho = 0.$$

In jedem Punkte der Oberfläche ist die Temperatur des Körpers nahezu jener des Raumes gleich, kann also sehr nahe zu Null angenommen werden. Es ist sohin

$\vartheta = 0$ sowohl unter dem Aequator, also für $\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{r_1^2}$, und $\zeta = 0$;

als auch unter den Polen, also für $\xi = \eta = 0$ und $\zeta = \frac{b}{r_1}$,

vorausgesetzt, dass a und b den Aequator- und Polhalbmesser des Himmelskörpers bedeuten.

Da in dem Mittelpunkte des Sphäroides die Temperatur endlich bleiben soll, so muss vor Allem

$$B = D = F = 0, \quad \cdots \quad (11)$$

und der weiteren Bestimmung halber

$$A = C = E = 1 \quad \cdots \quad (11')$$

sein. Die Gleichungen (10) können daher kürzer in der Form

$$\vartheta = 1 - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(\xi^2 + \eta^2) - \frac{q^2}{6}\xi^2 \quad \cdot \cdot \quad (12)$$

geschrieben werden.

Da die für den Mittelpunkt getroffene Bestimmung die zur Verfügung stehenden willkürlichen Constanten schon erschöpft hat, so legt die zweite Grenzbedingung eine Bedingungsgleichung zwischen den Grössen des Problems fest. Es besteht nämlich für den Aequator die Gleichung

$$1 - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\frac{a^2}{r_1^2} = 0, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (13)$$

und ähnlich für den Pol:

$$1 - \tfrac{1}{6} q^2 \frac{b^2}{r_1^2} = 0. \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (14)$$

In allen diesen Gleichungen bedeutet natürlich r_1 den Radius jener Kugel, welche mit dem gegebenen Sphäroid gleichen Inhalt hat. Es ist somit die Abplattung mit α bezeichnend:

$$r_1^3 = a^2 b = a^3(1 - \alpha), \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (15)$$

und dem zufolge:

$$\frac{a}{r_1} = (1 - \alpha)^{-1/3}, \quad \text{und} \quad \frac{b}{r_1} = (1 - \alpha)^{2/3}. \quad \cdot \cdot \quad (16)$$

Durch Einführung dieser Werthe in (13) und (14) kommt

$$\left(q^2 - \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(1 - \alpha)^{-2/3} = 6, \quad \text{und} \quad q^2(1 - \alpha)^{4/3} = 6, \quad (17)$$

oder nach Elimination von q^2:

$$(1 - \alpha)^{-2} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2\,c_p g \theta_0}(1 - \alpha)^{-2/3} = 1, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

was bei Vernachlässigung des Quadrats und höherer Potenzen von α zu der Form

$$\alpha = \frac{\omega^2 r_1^2}{4\,c_p g \theta_0} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

führt. Die Abplattung erscheint hier unter anderer Gestalt, als bei NEWTON oder CLAIRAUT, welche in deren Ausdruck nur mechanisch definierte Werthe einführen. Es soll jedoch später

gezeigt werden, dass auch die Gleichung (19) ohne Schwierigkeit in die übliche Form gebracht werden kann.

Der Zähler des Ausdruckes ist das Quadrat der linearen Aequatorgeschwindigkeit, also eine aus der Verschiebung der Fraunhoferschen Linien spectroscopisch beobachtbare Grösse. Und da die spectralphotometrische Beobachtung des Sternes einerseits zur Kenntniss der Mittelpunktstemperatur, anderntheils durch die Kenntniss der stofflichen Zusammensetzung auch zum Werthe der Grösse c_p führt, so kann die Abplattung ganz auf rein spectralanalytischem Wege bestimmt werden. Da endlich auf diesem Wege auch der Radius des Himmelskörpers bekannt wird*, so kann das aus Beobachtungen abgeleitete Product ωr_1 in die einzelnen Factoren zerlegt werden, was mit Hülfe der Gleichung (1) auch zur Dauer der Rotation führt.

II. Ist in einem zweiten Falle $n = 1$, oder $k = 2$, so lautet die Lösung des Gleichungssystemes (8):

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= A\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + B\frac{\cos q\varrho}{q\varrho} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0}, \\ \vartheta_\eta &= C\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + D\frac{\cos q\varrho}{q\varrho} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (20) \\ \vartheta_\zeta &= E\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + F\frac{\cos q\varrho}{q\varrho}. \end{aligned}$$

Für ihrer ganzen Masse nach gasförmige Himmelskörper bestehen dieselben Grenzbedingungen, wie in I. Man hat daher wieder

$$B = D = F = 0 \quad \text{und} \quad A = C = E = 1 \quad \cdot \cdot \quad (21)$$

wegen der Mittelpunktsbedingung

$$\vartheta_\xi = \vartheta_\eta = \vartheta_\zeta = 1 \quad \text{für} \quad \xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0.$$

Die Oberflächenbedingung giebt für den Aequator

$$\vartheta_\xi = \vartheta_\eta = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = \frac{a}{r_1} = (1-\alpha)^{-\frac{1}{3}},$$

und für den Pol

$$\vartheta_\zeta = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = \frac{b}{r_1} = (1-\alpha)^{2/3}.$$

---

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 163.

Es folgt hieraus für (20)

$$\frac{\sin q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{3\,\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g \theta_0} \quad \text{und} \quad q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}} = \pi, \quad (22)$$

oder nach Elimination von q:

$$\frac{\sin \pi\,(1-\alpha)^{-1}}{\pi\,(1-\alpha)^{-1}} = -\frac{3\,\omega^2 r_1^2}{\pi^2 c_p g \theta_0}(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}, \quad \ldots \quad (23)$$

oder nur die erste Potenz von α beibehaltend:

$$\alpha = \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{\pi^2 c_p g \theta_0}, \quad \ldots \quad (24)$$

welcher Ausdruck bis auf die nur von n, also auch von k abhängige Constante mit (19) identisch ist. Für $n = 0$ betrug dieser Factor 0,25, in dem jetzigen Falle wird er $\frac{3}{\pi^2} = 0.304$.

Man ist nun wohl berechtigt, ganz allgemein zu schreiben

$$\alpha = K \frac{\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}, \quad \ldots \quad (25)$$

wenn die Constante K eine bei isentropem Gleichgewichte nur von dem Verhältnisse der beiden specifischen Wärmen abhängige Grösse bedeutet. Allgemeiner könnte man sagen, dass K nur von der Art des thermischen Gleichgewichtes der Weltkugel abhänge. Bei beliebigem n kann deren Werth nur durch numerische Ausrechnung der Gleichungen (8) angegeben werden.

Die zweite der Gleichungen (17) und (22) enthält eine interessante Thatsache, welche schon dadurch ausgesprochen ist, dass die eine der beiden nothwendigen Grenzbedingungen des Problems die Bestimmung der willkürlichen Constanten besorgt. Ist nämlich ω und α der Null gleich, so nimmt q^2 einen vorgeschriebenen, nur von dem Verhältniss der beiden specifischen Wärmen abhängigen Werth an. In ihrer ganzen Masse gasförmige Weltkörper bilden daher ihrem Zustande und ihren Dimensionen nach nicht Individuen, sondern ganze Classen, deren Charakteristik nur von der Art des thermischen Zustandes und dem Verhältniss der beiden specifischen Wärmen, also auch der molecularen Zusammensetzung des Gases abhängt. Dieser dem Gesagten nach in der Gleichung (9′) ausgesprochene Satz, den ich in der mehrfach er-

wähnten Abhandlung* abgeleitet, ist für einen speciellen Fall schon von ZÖLLNER ausgesprochen und für den isothermen Zustand von RITTER behauptet worden.

Besitzt der Himmelskörper Axendrehung, so ist zwar nicht q selbst, immerhin aber den erwähnten zwei Gleichungen zufolge

$$q\,(1-\alpha)^{2/3} = \text{constant}, \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

was mit Rücksicht auf (9′) auch in der Form

$$\frac{r_1 s_0}{\sqrt{p_0}}\,(1-\alpha)^{2/3} = \text{const.} \quad \cdots\cdots \quad (26')$$

geschrieben werden kann. Es bilden also auch rotierende Himmelskörper keine Individuen, sondern nur Classen, und es scheint, dass der Abplattungsexponent von dem Werthe von n, der molecularen Zusammensetzung des Stoffes unabhängig ist.

Der Ausdruck (25) der Abplattung kann leicht so umgeformt werden, dass darin nur mechanisch definierte Werthe vorkommen. Bedeutet v das Volumen der Masseneinheit, so kann die durch dieselbe aufgenommene Wärmemenge durch die Gleichung

$$dQ = c_p d\theta - v dp \quad \cdots\cdots \quad (27)$$

ausgedrückt werden. Betrachtet man den Körper auch weiter als barycentrisch, so besteht die hydrodynamische Grundgleichung in der Form:

$$v dp = -\frac{g_1}{g}\,u dr, \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

was — isentropen Zustand vorausgesetzt — in die vorhergehende Gleichung eingeführt, ergiebt:

$$0 = c_p d\theta + \frac{g_1}{g}\,u dr. \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

Ist die Temperatur im Centrum der Kugel θ_0 und 0 an der Oberfläche, so ist

$$c_p \theta_0 = \frac{g_1}{g}\int_0^{r_1} u dr, \quad \cdots\cdots \quad (30)$$

wobei jedoch das Integral nur dann berechnet werden kann, wenn die Massenvertheilung im Innern des Körpers bekannt ist. Das würde die Integration der Zustandsgleichung (8) nöthig machen,

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 144.

doch gelangt man einfacher zum Ziele. Einem bekannten Satze der Integralrechnung zufolge, der hier Anwendung finden kann, lässt sich ein geeigneter Mittelwerth von u zwischen den Grenzen 0 und r_1 vor das Integral heben, so dass man statt (30) erhält:

$$c_p\theta_0 = \varepsilon \frac{g_1}{g} r_1, \quad \cdots \quad (31)$$

wobei ε für alle Gaskugeln gleicher Molecularstructur im isentropen Zustande dasselbe bleibt. Zur näheren Bestimmung dieses ε gehen wir von der Gleichung (9) aus, welche wegen der Bedeutung von n und laut des Gesetzes von BOYLE-GAY-LUSSAC auch in der Form

$$q^2 = \frac{4\pi r_1^4 g_1 s_0}{c_p \theta_0 g M}$$

geschrieben werden kann. Führt man die mittlere Dichte (s) der Gaskugel ein, so kommt unter Rücksicht auf (31):

$$q^2 = \frac{3 s_0}{\varepsilon (s)}. \quad \cdots \quad (32)$$

Es sei nun y das Integral der Zustandsgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + q^2 y^n = 0,$$

so wird

$$(s) = 3 s_0 \int_0^1 x^2 y^n dx,$$

und infolge dessen

$$\frac{1}{\varepsilon} = q^2 \int_0^1 x^2 y^n dx. \quad \cdots \quad (33)$$

Ist also $n = 0$ und daher $q^2 = 6$, so hat man

$$y = 1 - x^2$$

und es wird

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}.$$

Ist dagegen $n = 1$, mithin $q = \pi$ und

$$y = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

so hat man $\varepsilon = 1$. Für zweiatomige Gase ($k = 7/5$) ergiebt die mechanische Quadratur etwa $\varepsilon = 2.4$, wie schon RITTER fand.

Mit Hülfe von (31) kann nun (25) in der bekannteren Form:

$$\alpha = \frac{K}{\varepsilon}\,\frac{\omega^2 r_1}{g_1} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (34)$$

geschrieben werden, welche nun der NEWTON'sche Ausdruck der Abplattung ist. Misst man c_p, das bisher als in mechanischem Maasse gegeben gedacht wurde, im Wärmemaasse, so wird die Gleichung (34)

$$\alpha = 424\,\frac{K}{\varepsilon}\,\frac{\omega^2 r_1}{g_1}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (35)$$

Für incompressibele Flüssigkeiten, sowie für die Erde hat man

$$424\,\frac{K}{\varepsilon} = 1$$

nahezu, insofern als die Abplattung der Erde als das Verhältniss der äquatorealen Centrifugalbeschleunigung zu der Beschleunigung der Schwere dargestellt werden kann.

Insofern die Sonne ein Fixstern ist, der so der chemischen Zusammensetzung, als seinem Spectraltypus nach mit α Aquilae in naher Verwandtschaft steht, kann die Gleichung (35) auch auf die Sonne Anwendung finden. Die Discussion sämmtlicher Heliometermessungen der Sonne führen nach AUWERS zu einer Abplattung von $\alpha = \frac{1}{50\,000}$. Hiermit wird die Constante der Gleichung (35) empirisch bestimmt:

$$424\,\frac{K}{\varepsilon} = 0.943,$$

also innerhalb der Unsicherheit der Bestimmung der Sonnenabplattung wieder 1. Hiermit wird die Abplattung eines Sternes von gleicher chemischer Beschaffenheit und gleichem Spectraltypus mit der Sonne:

$$\alpha = 0{,}0056\,\frac{\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (36)$$

Diese Untersuchungen erleiden eine durchgreifende Modification, wenn der gegebene Weltkörper nicht in seiner ganzen Masse gasförmig ist. Denken wir uns, es wäre ein kugelförmiger fester, flüssiger oder einen Hohlraum bildender Kern vorhanden. Ist dessen Radius r_0, und bezeichnet Kürze halber

$$\frac{x_0}{r_1} = \xi_0; \quad \frac{y_0}{r_1} = \eta_0; \quad \frac{z_0}{r_1} = \zeta_0; \quad \frac{r_0}{r_1} = \varrho_0, \quad \cdots \quad (37)$$

so werden z. B. im Falle $n = 0$ die Grenzbedingungen für die Gleichungen (10) an der Oberfläche des Kernes:

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= 1, \quad \text{für} \quad \xi = \varrho = \varrho_0 \\ \vartheta_\eta &= 1, \qquad\quad \eta = \varrho = \varrho_0 \\ \vartheta_\zeta &= 1, \qquad\quad \zeta = \varrho = \varrho_0, \end{aligned}$$

während für die äussere Oberfläche, wie früher die Bedingung

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi = \vartheta_\eta = 0 \quad &\text{für} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{r_1} \\ \vartheta_\zeta = 0 \quad &\text{für} \quad \zeta = \frac{b}{r_1} \end{aligned}$$

besteht. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= A + \frac{B}{\varrho_0} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\varrho_0^2 \\ 1 &= E + \frac{F}{\varrho_0} - \tfrac{1}{6}\, q^2 \varrho_0^2 \\ 0 &= A + B\,(1-\alpha)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(1-\alpha)^{-\frac{2}{3}} \\ 0 &= E + F\,(1-\alpha)^{-\frac{2}{3}} - \tfrac{1}{6}\, q^2 (1-\alpha)^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \tag{38}$$

und ganz ähnlich gebaute Gleichungen, wenn man aus dem Falle $n = 1$ der Gleichungen (20) ausgegangen wäre:

$$\begin{aligned} 1 &= A\,\frac{\sin q\varrho_0}{q\varrho_0} + B\,\frac{\cos q\varrho_0}{q\varrho_0} + \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g \theta_0} \\ 1 &= C\,\frac{\sin q\varrho_0}{q\varrho_0} + D\,\frac{\cos q\varrho_0}{q\varrho_0} \\ 0 &= A\,\frac{\sin q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} + B\,\frac{\cos q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} + \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g \theta_0} \\ 0 &= C\,\frac{\sin q\,(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}} + D\,\frac{\cos q\,(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \tag{39}$$

Diese Gleichungen genügen zwar zur Bestimmung der auftretenden Integrationsconstanten, bedingen aber keinen Zusammenhang mehr zwischen den ursprünglichen Grössen des Problems. Weltkörper mit dem minimalsten festen, flüssigen oder hohlen Kerne bilden daher keine Classen mehr, sondern jeder für sich stellt ein in seinen Abmessungen und seinen Zustandsgrössen ganz selbständiges Einzelwesen dar. Dieser Unterschied ist jedenfalls für manche planetarische Nebel von Wichtigkeit.

Es wäre zwecklos, mittels der Gleichungen (38) und (39) die Integrale (10) und (20) umformen zu wollen. Es möge nur erwähnt werden, dass sich die Temperaturen derselben Raumstelle in rotierender und ruhender Gaskugel um Grössen von der Ordnung der Abplattung unterscheiden, die wenigstens heute noch durchaus vernachlässigt werden dürfen.

Mit der bisher angestrebten Genauigkeit kann sogleich das System (8) integriert werden. Bedeutet ϑ und ϑ_0 die relative Temperatur an demselben Punkte des Raumes in der rotierenden und ruhenden Kugel, und ist

$$\vartheta - \vartheta_0 = \tau \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (40)$$

eine kleine Grösse von der Ordnung der Abplattung, von der nur die erste Potenz berücksichtigt zu werden braucht, so erhält man durch Einsetzung in die Gleichung (8) und unter Berücksichtigung, dass ϑ_0 dem Werthe $\omega = 0$ entspricht, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2} + \left(3\,\frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\xi} + nq^2\vartheta_0^{n-1}\tau\,\frac{\xi^2}{\varrho^2} = 0 \quad \cdot \cdot \quad (41)$$

und durch Vertauschung der Buchstaben ξ in η und ζ ganz ähnliche Gleichungen für die anderen Coordinaten.

Es ist nun hierin

$$\frac{\partial\tau}{\partial\xi} = \frac{\xi}{\varrho}\,\frac{\partial\tau}{\partial\xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2} = \frac{\xi^2}{\varrho^2}\,\frac{\partial^2\tau}{\partial\varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\xi^2}{\varrho^3}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\varrho}, \quad \cdot \quad (42)$$

und hiermit gehen die Gleichungen (41) in die gemeinsame Form

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\,\frac{\partial\tau}{\partial\varrho} + nq^2\vartheta_0^{n-1}\tau = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (43)$$

über, welche bezeugt, dass bis zu Grössen von der Ordnung α^2 der Temperaturunterschied in rotierender und ruhender Gaskugel von der Richtung unabhängig ist.

Für zweiatomige Gase ($n = 2.5$) kann mit einiger Näherung*

$$\vartheta = 1 - \varrho \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (44)$$

gesetzt werden. Es wird hiermit (43)

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 155.

$$\frac{d^2\tau}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + nq^2(1-\varrho)^{n-1}\cdot\tau = 0, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (45)$$

oder wenn

$$y = \varrho\tau, \quad \text{und} \quad x = 1 - \varrho \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (46)$$

gesetzt wird, einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} + nq^2x^{n-1}y = 0, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (47)$$

welche Gleichung leicht integriert werden kann, um ein anschauliches Bild von dem Temperaturunterschiede in rotierenden und ruhenden Weltkugeln zu gewinnen.

11.

DAS DIAPHRAGMA IN DEM MARKE DER DICOTYLEN HOLZGEWÄCHSE.

Von Dr. ALEX. MAGÓCSY-DIETZ,
corr. Mitgl. d. ungar. Akademie d. Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der Akademie am 19. April 1898.

Aus „Math. és Természettud. Értesitö" (Math. u. Naturwiss. Anzeiger) Band XVII. pag. 1—43.

Einen wesentlichen Theil der botanischen Forschungen bilden diejenigen physiologisch-anatomischen Forschungen, welche den Zusammenhang zwischen der anatomischen Construction der Pflanzen und zwischen deren Lebensthätigkeit erforschen. Es ist unleugbar und der Erfolg bisheriger zahlreicher Forschungen beweist es, dass zwischen den physiologischen und anatomischen Eigenschaften ein enger Zusammenhang besteht.* Zum Nachweis dieses Zusammenhanges ist einestheils die experimentale Physiologie, andererseits die vergleichende Anatomie berufen; in vielen Fällen gelingt es nur mit Hülfe des beiderseitigen Beweises, den erwähnten Zusammenhang nachzuweisen.

Auf diese Grundsätze gestützt habe ich versucht, die eigenthümliche Eigenschaft einiger dicotyler Holzgewächse aufzuklären. Bei einigen dicotylen Holzgewächsen nämlich, z. B. bei Vitis ist das Mark scheinbar nicht continuierlich, wie es bei den Dicotyledonen allgemein bekannt ist, sondern es ist durch entsprechende

* M. Westermayer u. H. Ambronn: Beziehungen zwischen Lebensweise und Structur der Schling- und Kletterpflanzen. Flora 64. Jahrg. 1881. pag. 417.

stärkere Gewebeschichten, durch sogenannte Diaphragmen unterbrochen (Fig. 1—11), bei einigen ist diese Unterbrechung des Markgewebes ganz unabhängig von der Knotenstelle (Fig. 12).

Die Eigenthümlichkeit dieser Construction des Markes erwähnen schon DUHAMEL DU MONCEAU* und DUPETIT-THOUARS**, ohne sich jedoch mit dessen genauer anatomischen Construction und mit dessen Verbreitung in der Reihe der Pflanzen befasst zu haben.

ARTHUR GRIES***, dessen Beobachtungen sich gleichfalls hierauf erstrecken und sogar die physiologische Rolle des Markes umfassen, behandelt kurz auch die physiologische Function dieser Construction des Markes. A. PRUNET† befasst sich im Allgemeinen vorzüglich aus letzterem Gesichtspunkte mit dem Marke in den Knoten und dessen eigenthümlicher Construction.

Dass diese eigenthümliche Construction des Markes in erster Reihe den Pflanzen als Reserve-Nahrungsbehälter dient, ist in Kürze das Resultat der Untersuchungen jenes Forschers.

Die Richtigkeit des Resultates jener ausgezeichneten Forscher bereitwilligst anerkennend, konnte ich mich damit doch nicht gänzlich zufrieden geben, einfach deshalb, weil die Bildung dieser Markconstruction und das Vorkommen derselben auf den ersten Blick schon darauf hindeutet, dass sie nebst Anhäufung von Reserve-Nahrungsstoffen auch noch zu einer andern physiologischen Funktion im Pflanzenleben berufen sei.

I. Die äusseren Verhältnisse der Diaphragmen.

Das Mark der dicotylen Holzgewächse bildet entsprechend der Gewebe-Differenzierung der dicotylen Pflanzen einen centralen

* Physiques des arbres I pars p. 34. 1758.

** Histoire d'un morceau de bois. 1815.

*** Memoire sur la moelle des plantes ligneuses. Nouv. archives du Museum d'histoire naturelle de Paris. T. VI 1870, pag. 201—294 und im Auszuge der Annales des sciences naturelles. Ser. V. T. XIV. Paris 1872, pag. 34—79.

† Recherches sur les noeuds et les entre-noeuds de la tige des dicotyledons. Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 302. Im Auszuge in Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sciences. T. CX jan. — juin 1890.

Cylinder, welcher sich durch die ganze Länge des Pflanzenstengels erstreckt. Bei den meisten Pflanzen scheint das Mark ganz gleichartig zu sein, denn es besteht ja das Mark der meisten Pflanzen mit wenig Ausnahme aus so ziemlich gleichförmigen polyedrisch geformten Parenchym-Zellen, welche sich in der Länge des Stengels grösstentheils in Reihen placieren, dünnwandig oder nur wenig verdicktwandig sind, hier und dort gewöhnlich sehr geräumige rundlich-eiförmige Tüpfel aufweisen und zum Theile von kleinen Intercellular-Gängen von einander geschieden sind. Die Markzellen enthalten in ihrer Jugend ausser Cytoplasma reichlich Wasser mit darin aufgelösten Kohlehydraten, ja sogar noch andere nicht wesentliche Bestandtheile, in der Ruheperiode der Vegetation aber eine grosse Menge Stärkemehl. Es sind zahlreiche dicotyle Pflanzen, bei denen das Mark in seiner ganzen Ausdehnung seine Lebensfähigkeit behält, in diesem Falle werden seine Zellen oft dickwandig, aber sie behalten ihre ursprüngliche Gestalt und sämmtliche lebende Zellen enthalten den Winter über, d. h. in der Ruhe-Zeitperiode der Pflanzen, Reserve-Nahrungsstoff und wenig Wasser, in der Vegetationszeit aber reichlicher oder nur ausschliesslich Wasser*, z. B. Quercus, Betula, bei Fraxinus sogar noch das 20jährige Mark.**

Wieder bei andern verliert das Mark schon gegen das Ende des ersten Jahres seine Lebensfähigkeit, der Inhalt seiner Zellen verschwindet und die Markzellen enthalten nur Luft, sind höchstens noch zur Transportierung des Wassers auf mechanische Art geeignet und halten das statische Gleichgewicht in den verschiedenen Theilen des Stengels aufrecht.*** Im Uebrigen aber haben sie dann ihre physiologische Rolle beendigt, ihr Gewebe ist abgestorben.

So ist es in den Fällen, wo das Mark aus ganz homogenen Zellen besteht. Ja, es geschieht in solchen Pflanzen, dass zufolge Dehnung der Stengelglieder ein grosser Theil der Markzellen, welche ihr Theilungsvermögen verloren haben, nach und nach

* Prunet: Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 330—331.

** Gries: Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. pag. 31.

*** D'Arbaumont: La tige des Ampelidées. Ann. d. sc. nat. S. VI. T. XI. pag. 206.

zerreisst und das Mark selbst als zerrissen erscheint, z. B. Juglans, Paulownia (Fig. 11), oder es geht gänzlich verloren, und es entsteht an Stelle des Markes in dem Stengel eine leere Röhre, z. B. Lonicera. So verhält es sich vorzüglich mit den Marktheilen in den Internodien der Stengel.

Eine hievon etwas abweichende anatomische Construction besitzt im Allgemeinen jener Marktheil des Stengels, welcher in den Knoten auftritt. Schon Gries* hat das nodale und internodale Mark unterschieden.

In dem Marke sehr vieler Pflanzen, sowohl in dem der Knoten als auch in dem der Internodien, kommen auch andere von den gewöhnlichen Parenchymzellen abweichende Zellen vor (heterogenes Mark); unter diesen sind solche, welche Krystalle führen, ferner solche, die Stärke oder Gerbsäure enthalten, aber auch solche finden sich in grosser Anzahl, die vorzüglich durch Verdickung ihrer Zellenwände auffallen; diese letzteren sind ganz sklereidartig. Sie entstehen in dem Marke einzelner Pflanzen nur einzeln in kaum bemerkbarer Menge, in anderen Fällen kommen sie schon in grösserer Menge vor und bilden ganze Zellennester**, endlich können sie auch in einer solch' grossen Menge auftreten, dass sie eine in die Quere des Markes stehende, bald kleinere, bald grössere Scheidewand bilden und auf diese Weise gleichsam die Continuität des gleichartig construierten Markes unterbrechen. Solche aus abweichend gebildeten Zellen bestehende Gewebe, Platten, Markscheidewände können sowohl in dem internodalen, wie in dem nodalen Marke vorkommen; so finden wir internodale Diaphragmen in dem Marke des Liriodendron (Fig. 12). Im grössten Maasse erreichen sie aber ihre Entwickelung in den Knoten, wo sie dann mehr oder weniger dicke Diaphragmen bilden. Meine jetzige Abhandlung umfasst nur die Resultate jener meiner Forschungen, welche sich auf die gut entwickelten, dem freien Auge sichtbaren nodalen Diaphragmen beziehen.

In den Knoten befindliche Diaphragmen hat Gries*** in

* l. c. p. 43.

** Dr. J. Wiesner: Elemente d. Anat. u. Physiologie II. Aufl. Wien 1885. pag. 144.

*** l. c. p. 53.

folgenden Pflanzen constatiert: Ficus Carica, Ulmus campestris, Vitis vinifera, Clematis Flammula, Lonicera Xylosteum, L. fragrantissima, Abelia rupestris, Berberis macrophylla, Malus communis; zusammen in 9 Pflanzen. Unter diesen konnte ich aber das auch mit freiem Auge sichtbare Diaphragma bei Ulmus campestris, Berberis macrophylla, Malus communis in den mir zu Gebote stehenden Pflanzen nicht finden. Dagegen habe ich unter mehreren hundert von mir untersuchten dicotylen Holzgewächsen in den nachstehend Aufgezählten deutlich sichtbare und gut entwickelte Knotendiaphragmen gefunden:

1. Abelia rupestris LINDL.
2. Broussonetia papyrifera VENT.
3. Clematis Flammula L.
4. „ tubulosa TURCZ.
5. „ Vitalba L.
6. Coronilla emeroides BOIS. et SPREN.
7. Deutzia crenata S. et Z.
8. „ gracilis S. et Z.
9. „ scabra THUNB.
10. Ficus Carica L.
11. „ ulmifolia LAM.
12. Forsythia Fortunei LINDL.
13. „ suspensa VAHL.
14. „ viridissima LINDL.
15. Leycesteria formosa WALL.
16. Lonicera Alberti REG.
17. „ alpigena L.
18. „ bella ZABEL.
19. „ brachypoda Dl.
20. „ Caprifolium L.
21. „ chrysantha TURCZ.
22. „ fragrantissima CARR.
23. „ gibbosa W.
24. „ hispida PALL.
25. „ iberica M. B.
26. „ Ledebouri ESCHSCH.
27. „ Kamschatica HORT.

28. Lonicera japonica THUNBG.
29. „ occidentalis HOOK.
30. „ orientalis LAM.
31. „ Periclymenum L.
32. „ pyrenaica L.
33. „ Ruprechtiana REG.
34. „ tatarica L.
35. „ Xylosteum L.
36. Paulownia tomentosa K. KOCH.
37. Philadelphus pubescens LOIS.*
38. Symphoricarpus orbiculatus MÖNCH.
39. „ racemosus MICHX.
40. „ vulgaris L.
41. Vitis Berlandieri PLANCH.
42. „ cinerea ENGELM.
43. „ cordifolia MICHX.
44. „ ficifolia BUNGE.
45. „ Labrusca L.
46. „ riparia MICHX.
47. „ rupestris SCHEELE.
48. „ Solonis ENGELM.
49. „ vinifera L.

zusammen in 49 Arten. Ich bemerke jedoch, dass ich nur jenen meine Aufmerksamkeit gewidmet habe, von welchen ich lebendes Material untersuchen konnte, das Knotendiaphragma kommt aber noch bei viel mehr Pflanzen vor, denn DIPPEL** und KOEHNE***

---

* Es ist auffallend, dass sich in dem Budapester botanischen Garten an den zahlreichen Philadelphus-Arten kein Diaphragma entwickelt hat, eine Ausnahme macht nur pubescens, welcher unter dem Namen Deutzia sanguinea HORT. den Gärtnern bekannt ist.

** Dr. L. DIPPEL: Handbuch der Laubholzkunde II. Theil. Berlin 1892. p. 544.

*** Dr. E. KOEHNE: Deutsche Dendrologie, Stuttgart 1893, p. 401.

Diese zwei Werke reihen noch folgende Arten zu denjenigen, welche Diaphragmen haben: Vitis candicans ENGELM., V. aestivalis MICHX., V. Thunbergi S. et Z., V. californica BEUTT., V. amurensis RUPR., V. palmata VAHL., V. Pagnucci ROM., V. Coignetiae PALL., V. rubra MICHX.

z. B. haben an dem grössten Theil der Vitis-Arten das Diaphragma constatiert.*

In dem Stengel sämmtlicher vorgenannter Arten stirbt das Mark sehr zeitig ab, das Skelett der Markzellen bleibt jedoch lange zurück, wie z. B. in Vitis, Ficus, Broussonetia, dagegen werden in andern Arten die Markzellen — indem sie absterben — zerrissen, sie schrumpfen zusammen und an ihrer Stelle bleibt die leere Röhre, wie z. B. in dem Stengel der Forsythia und der meisten Lonicera-Arten, zwischen welchen sich jedoch auch solche vorfinden, in welchen der vom Marke zurückgebliebene, aus Zellenskeletten bestehende Theil an den Wänden der Röhre als Auskleidung zurückbleibt, z. B. Lonicera tatarica.** In den meisten erstrecken sich die leeren Röhren bis unmittelbar an das Diaphragma.

Die Diaphragmen jedoch zeigen, auch wenn sie bezüglich der Stelle des Vorkommens übereinstimmen, eine grosse Mannichfaltigkeit in Bezug auf Grösse und Gestalt ihrer Entwickelung.

Das Diaphragma bei Vitis vinifera gestaltet sich in solcher Weise, dass es an dem in transversaler Ebene halbierten Sprosse mehr oder weniger gleich ist, oben concav, unten aber eben, ferner seine untere Oberfläche grösser ist als die obere (Fig. 2). Eine andere Gestalt zeigt es jedoch an dem Längenschnitte in medianer Ebene. Besonders an diesem Schnitte ist das Diaphragma der verschiedenen Knoten so ziemlich abweichend (Fig. 1). So ist es an einem Knoten, wo nur ein Blatt stand, an der Blattseite um vieles dicker, als an der anderen Seite; dagegen ist es bei den

---

* Dr. H. Solereder behauptet in seinem Werke „Systematische Anatomie der Dicotyledonen (Stuttgart 1898)“ p. 43 von den zu den Anonacäen gehörigen Gattungen Anona, Artabotrys und Xylopia nach Baillon, dass ihr Mark von Steinzellen-Diaphragmen gefächert ist, ähnliches erwähnt er auf Grund eigener Untersuchungen von Unona, Uvaria, Miliusia und Mitrephora und theilt auch den Längenschnitt des Markes von Uvaria scabrida Oliv. mit (p. 40). Das Diaphragma dieser Pflanzen ist demjenigen des Liriodendron ähnlich. Dessgleichen erwähnt er internodale Diaphragmen in dem Marke der Arten bei Cleyera, Eurya, Freziera, Ternstroemia und Visnea (p. 153).

** Dr. A. de Bary: Vergl. Anatomie d. Vegetationsorgane d. Phanerogamen und Farne. Leipzig 1877. p. 419.

Rankenknoten an beiden Seiten beinahe gleich, höchstens an der Rankenseite ein wenig dicker (Fig. 1). Auch an diesem Schnitte

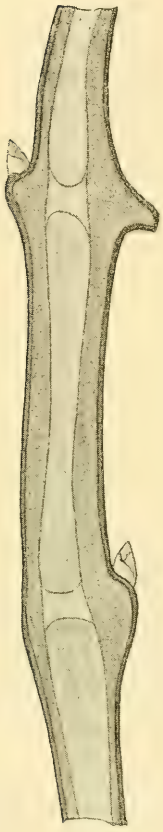


Fig. 1.

Vitis vinifera L. Medianer Längsschnitt eines Triebes. Skizziert.

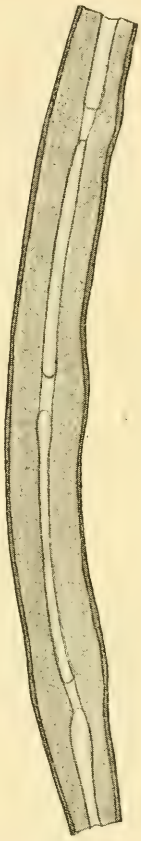


Fig. 2.

Vitis vinifera L. Transversaler Längsschnitt eines Triebes. Skizziert.

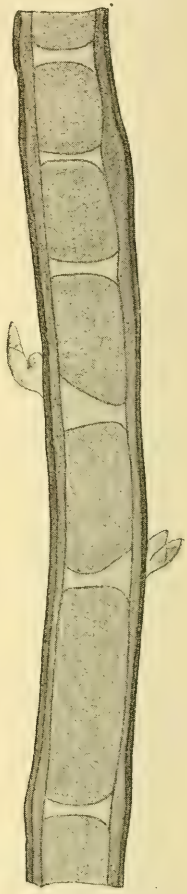


Fig. 3.

Ficus Carica L. Längsschnitt eines einjährigen Triebes. Skizziert.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

ist die obere Fläche concav, die untere mehr oder weniger eben und immer breiter als die obere.

Eine ähnliche Erscheinung zeigt das Diaphragma bei Ficus carica (Fig. 3); wenn wir nämlich unmittelbar an der Blatt-Inser-

tionsebene das Diaphragma median durchschneiden, so finden wir in der Nähe des Blattes seinen breitesten Theil, dagegen an der dem Blatte entgegengesetzten Seite den schmalsten; wenn wir es aber quer auf die eben erwähnte Ebene schneiden, dann erscheint es beinahe ganz gleich und die beiden Oberflächen sind ziemlich gleich concav, dagegen ist in der Medianschnitt-Ebene die untere Oberfläche mehr eben, die obere hingegen schief concav.

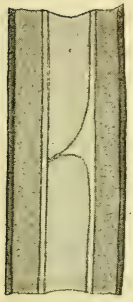


Fig. 4.

Broussonetia papyrifera VENT. Medianer Längsschnitt eines unvollständigen und vollständigen Diaphragmas. Skizziert.

Fig. 5.

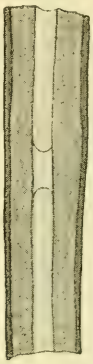


Fig. 6.

Coronilla emeroides BOIS. et SPREN. Medianer Längsschnitt eines gleichen und ungleichen Diaphragmas. Skizziert.

Fig. 7.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

Dieselbe Erscheinung wiederholt sich in jenen Knoten, an welchen sich nur ein Blatt befindet, z. B. bei Coronilla emeroides (Fig. 7), ja es kommt sogar auch jener Fall vor, dass das Diaphragma den Markcylinder nicht ganz durchgreift, z. B. in manchen einblättrigen Knoten der Broussonetia (Fig. 4). An dem Diaphragma dieser zwei Arten kann man es noch besser sehen, dass es sich an der gegen das Blatt fallenden Seite bedeutend dicker entwickelt, als an den vorgenannten, bisweilen bis zur 2—5fachen Dicke. In diesen Fällen sind ganz natürlich die die Gestalt des Diaphragma begrenzenden Flächen sehr schwankend und zwar hängt dies von der Art ab, wie sich die Dicke des Diaphragma an den zwei entgegengesetzten Seiten entwickelt.

Charakteristisch ist jedoch für das Diaphragma dieser Arten, dass sie sich nicht in allen Fällen derartig entwickeln. In den

Knoten bei Coronilla emeroides ist häufiger die erwähnte Gestalt, aber man findet oft genug auch ein solches, dessen Gestalt auch in der Blattinsertions-Medianebene völlig gleiche Seiten zeigt und nicht schief ist (Fig. 6). Dagegen ist in den Knoten der Broussonetia seltener das unvollendete Diaphragma (Fig. 4), als das nach allen Seiten gänzlich entwickelte (Fig. 5), welches man vorzüglich in jenen Knoten findet, wo die abwechselnde oder zweireihige Blattstellung in die decussierte Blattstellung übergeht.

Ein solches nach allen Seiten sich gleichmässig ausdehnendes Diaphragma treffen wir an in den Knoten der Forsythia suspensa und Lonicera tatarica, aus deren Stengelgliedern jedoch das Mark stufenweise verschwindet und an seiner Stelle eine leere Röhre zurückbleibt. Bei diesen zweien ist aber trotz dieser Uebereinstimmung doch auch in der Gestalt des Diaphragma eine Verschiedenheit. Das Diaphragma der Forsythia schliesst sich nämlich ziemlich schnell und scharf von dem Marke und später von der dessen Stelle einnehmenden Röhre ab und deshalb sind seine Begrenzungsflächen, d. h. seine obern und untern Flächen in sehr vielen Fällen so ziemlich ganz eben und bilden beinahe einen rechten Winkel mit dem das Mark umgebenden Theil. Dagegen sind bei Lonicera tatarica und bei den meisten Loniceren die begrenzenden Flächen des Diaphragma concav (Fig. 10) und schliessen sich stufenweise verlaufend an die Wände der leeren Röhre an, ferner sind sie von den dünnen Schichten des abgestorbenen Markes bedeckt. Die Gestalt betreffend steht zwischen jenen beiden und gleicht einigermassen dem der Weinrebe das Diaphragma bei Clematis Flammula, welches oben ganz concav, unten aber ganz eben ist, sich scharf vom Marke abscheidet, oben dagegen stufenweise verläuft (Fig. 13, 20). Die Diaphragmagestalt der Deutzia-Arten nähert sich derjenigen von Forsythia und Lonicera tatarica, denn seine Concavität ist oft so gering, dass es beinahe so geformt ist, wie das der Forsythia, hingegen steht seine gewöhnliche Gestalt näher derjenigen von Lonicera, nur dass es mit viel geringeren Marküberbleibseln bedeckt ist. Die in dem früher mitgetheilten Verzeichnisse der als Diaphragma-Pflanzen aufgezählten Arten haben mehr oder weniger solche Diaphragmen, welche diesen umschriebenen Diaphragma-Typen entsprechen.

So wie sich jedoch bei Coronilla emeroides auch sehr schiefe, bei Broussonetia aber unvollendete Diaphragmen entwickeln, so kann auch bei Forsythia, Paulownia und Philadelphus (Fig. 8) das Diaphragma eine mehr oder weniger unvollkommene Entwickelung zeigen, insofern es sich an der Peripherie der Markröhre als angeschwollener mehr oder weniger dicker Ringwulst entwickelt, der in der Mitte nicht zusammenschliesst und so das an der beiderseitigen Grenze des Diaphragma befindliche Mark der Stengelglieder, beziehungsweise die an Stelle des Markes entstehende

Fig. 8.

Philadelphus pubescens Loisl. Wulstartiges Diaphragma. Skizziert.

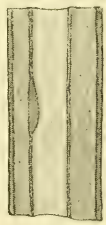


Fig. 9.

Forsythia suspensa Vahl. Unvollendetes Diaphragma. Skizziert.

Fig. 10.

Lonicera tatarica L. Gleichmässig ausgebildetes Diaphragma. Skizziert.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

Röhre nicht von einander abschliesst. In manchen Fällen entwickelt es sich in solcher Art in einzelnen Knoten bei Forsythia (Fig. 9) und zwar schwellen die Wülste entweder in solchem Maasse an, dass sie fast an einander reichen, oder aber so, dass sie weit von einander bleiben, im ersten Falle lassen sie einen engeren, im letztern Falle einen grössern leeren Raum in der Mitte. Der leere Raum fällt jedoch in den meisten Fällen nicht in die Mitte, sondern etwas seitwärts, insofern als der Ringwulst gewöhnlich an der einen Seite mehr anschwillt, als an der andern (Fig. 9).

Während diese Erscheinung bei Forsythia seltener ist, ist sie bei Paulownia häufiger und das vollständige Diaphragma ist das seltenere (Fig. 11), in welcher Gestaltung es uns an das von

Lonicera erinnert, so dass bei Paulownia das sonst auch partieweise zerrissene Mark von dem vollständig entwickelten Diaphragma abgetheilt wird (Fig. 11), hingegen, wenn es sich nicht gänzlich entwickelt, so wird der durch das stufenweise Verschwinden des Markes entstandene Kanal endlich continuierlich und an Stelle des Diaphragma ist oft nur eine kleine, manchmal nur an einer Seite entwickelte wulstartige Anschwellung zu bemerken.

Bei Philadelphus endlich findet man kaum oder überhaupt gar keine vollständig entwickelte Diaphragmen. In den Knoten jedoch ist das lockere Mark immer enger, als in den Internodien (Fig. 8).

Von den normal entwickelten Diaphragmen bei Vitis und Ficus angefangen bis zu dem bei Philadelphus gibt es eine ganze Reihe von in stufenweiser Abnahme ausgebildeten Diaphragmen, und bei noch manchen anderen Pflanzen ist nur mehr eine Spur des Diaphragmas in den Knoten in Form von zufällig entwickelten und nestartig angehäuften härteren und dickwandigeren Zellgruppen vorhanden.

Diesen Typen entsprechend ist das Diaphragma ziemlich beständig, obgleich sich auch in dieser Hinsicht die Arten einigermaassen verschieden verhalten. So behält z. B. das Diaphragma von Vitis, Ficus, Lonicera und Clematis beständig seine Gestalt, dagegen wechselt diese schon mehr bei Broussonetia, Coronilla und noch mehr verändert sie sich bei Forsythia, und bei Paulownia findet man sogar nur selten gleichförmig entwickelte Diaphragmen. Diese Veränderungen sind aber bei den genannten Gattungen nicht nur an verschiedenen Individuen einer Art, sondern auch an ein und demselben Individuum einer und derselben Art zu constatieren.

Noch grösser sind die Veränderungen betreffs der Breite — und Dicke — des Diaphragmas. Der Breite-Durchmesser hängt mehr oder weniger von dem Umfange des Markes ab, denn in jedem Fall ist der Diameter des Diaphragma im geringen Maasse grösser als der des internodalen Markes.

So hat es z. B. bei Ficus carica an einem aus 5jährigen Trieben bestehenden Aste nachstehende Breite-Dimensionen gezeigt:

1jährig 2—3 mm.
2jährig 3—5 mm.
3jährig 5—7 mm.
4jährig 6—7 mm.
5jährig 6—7 mm.

Dagegen bei Vitis vinifera

1jährig 2—3 mm.
2jährig 2—4 mm.
3jährig 3—5 mm.
4jährig 4—6 mm.
5jährig 5—6 mm.

Ich bemerke, dass diese durchschnittlichen Dimensionen aus 52 Diaphragma-Messungen an ein und demselben Aste bei Ficus carica und aus 44 bei Vitis vinifera entstammen.

Aus diesen Dimensionen können wir folgern, dass das Diaphragma vom Jahre seiner Entstehung durch eine Reihe von gewissen Jahren in seinen Breite-Dimensionen zunimmt, um dann nach Erreichung des Maximums seiner Breite dieses bis zum hohen Alter der Pflanze zu behalten. Diese Erscheinung stimmt sonst mit dem überein, was PRUNET* im Allgemeinen über das Mark in den Knoten der dicotylen Pflanzen sagt, dass es nämlich umfangreicher ist, als das Mark in den Stengelgliedern und dass es diese Umfangsgrösse erst nach einer gewissen Zeit erreicht.

Eine noch grössere Mannigfaltigkeit zeigt das Diaphragma in dem Diameter seiner Dicke und zwar sowohl an den verschiedenen Arten, wie an den verschiedenen Individuen ein und derselben Art, obzwar wieder das Diaphragma eines Individuums und sämmtlicher Individuen einer Art in den Grenzen gewisser Dimensionen bleibt.

Unter den Arten haben Clematis Flammula und Broussonetia papyrifera das dünnste Diaphragma, denn bei ersterer erreicht es durchschnittlich kaum eine Dicke von 0·5 mm, an der letztern

* Sur la structure comparée des noeuds et des entre-noeuds dans la tige des dicotyledons. Comptes rendus T. CX jan.—juin 1890, p. 594. — Recherches sur les noeuds et les entre-noeuds de la tige des dicotyledons. Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 329.

aber schwankt diese zwischen 0·5 bis 1 mm und erreicht also, oder kaum, die Dicke der Schichten der Markscheide, während doch die meisten Diaphragmen um vieles dicker sind, als die Schichten der Markscheide. Diesen gegenüber stehen dann die dicksten, wie solche bei Coronilla emeroides, Paulownia, Forsythia und Lonicera sich vorfinden, wo sie manchmal die Dicke von 8—15 mm erreichen.

Bei der Bestimmung dieser durchschnittlichen Dimensionen muss man jedoch vorsichtig sein und man darf jenes Diaphragma nicht in Berücksichtigung ziehen, welches die jährigen Triebe eines Zweiges von einander trennt, das sog. „Spross-Zwischenmark" (moelle interrameale Gries*), welches oft bedeutend dicker ist und mehr oder weniger einer andern Beurtheilung unterliegt.

Die Dicke kann auch innerhalb einer und derselben Art Schwankungen zeigen. Die Dickendimension der vorerwähnten 44 untersuchten Diaphragmen bei Vitis und der 52 bei Ficus carica schwankten durchschnittlich zwischen 1—3 mm. Sehr natürlich war für die Messungen die Mitte des Diaphragma maassgebend, welche mehr oder weniger den Mittelwerth zwischen den beiden Randmessungen giebt.

An den Individuen von Ficus carica von verschiedenen Standorten bleibt die Dicke des Diaphragma so ziemlich gleich. Dagegen ist es an den verschiedenen Individuen von Vitis vinifera sehr veränderlich. Es gibt nämlich Arten, welche dünnere Diaphragmen haben, als das durchschnittliche Maass ist, wie: Vitis riparia, rupestris, Solonis, und daneben solche, an welchen das Diaphragma dicker ist, wie: Vitis Labrusca, Vitis cinerea. Auch nach den Abarten wechselt bei Vitis die Dicke des Diaphragma, wie dies an den Trieben bei Vitis vinifera mit dünnern und dickern Diaphragmen hervortritt. Uebrigens verändert sich die Dicke des Diaphragma an den Trieben bei Vitis auch noch darnach, ob diese in rankentragenden oder rankenlosen Knoten stehen. Besonders in den rankentragenden Knoten ist es immer etwas dicker als in den rankenlosen. Ja, wenn wir die aus verschiedenen

---

* Nouvelles archives. T. VI. pag. 230—231. — Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. pag. 43.

Jahren stammenden Diaphragmen eines und desselben Individuums mit Aufmerksamkeit untersuchen, so finden wir auch Schwankungen. Dies ist jedoch nur exceptionell. Die grosse Schwankung in der Dicke des Diaphragma bei Arten, Spielarten und Individuen von Vitis bin ich geneigt, einestheils der Cultur, anderntheils der sehr verbreiteten Kreuzung zuzuschreiben. Wir sind ja heute auch mit den wilden und verwildeten Vitis-Arten so daran, dass wir auf eine ganz reine Art oder Varietät kaum treffen können. Durch die Kreuzung aber werden bekanntlich nicht nur die äussern, sondern auch die innern Eigenschaften einer Veränderung unterworfen.

Fig. 11.

Paulownia imperialis S. et Z. Diaphragma und gefächertes Mark. Skizziert.

Fig. 12.

Liriodendron tulipifera L. Mark mit internodalen Diaphragmen. Skizziert.

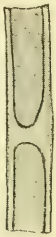


Fig. 13.

Clematis Flammula L. Diaphragma. Skizziert.

Nach der Natur und wenig vergrössert.

Viele sind geneigt, die Veränderung der Diaphragmen dem Klima und auch der Cultur zuzuschreiben. Dies ist zwar nicht unmöglich, kann aber nur durch genaue Beobachtung und insbesondere durch Versuche nachgewiesen werden.

In den Kreis dieser Veränderungen reihe ich nicht ein jene an dem Diaphragma sich zeigende Erscheinung, dass es sich in manchen Trieben an den untersten Knoten, ferner an den unter der Erde entwickelten Knoten nicht ausbildet, wie dies auch schon PRUNET* constatiert hat.

Diese Erscheinung hat jedoch schon eine andere physiologische und zwar eine mehr auf die Ernährung bezügliche Ursache

* Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 333.

und eben deshalb kann das Diaphragma dieser erwähnten Knoten ebenso wenig in den Bereich der Behandlung der Knotendiaphragmen gezogen werden, wie das Spross-Zwischenmark.

Es hängt mit dieser eben erwähnten physiologischen Erscheinung auch das zusammen, an welchem Theile des einjährigen Triebes sich unter allen Diaphragmen die stärksten entwickeln. Das stärkste Diaphragma nenne ich nämlich dasjenige, bei dem Breite- und Dicke-Durchmesser verhältnissmässig die grössten sind und das die kleinsten Dimensionen zeigende nenne ich das schwächste. In dieser Beziehung zeigen Ficus carica und Vitis vinifera ein übereinstimmendes Verhalten, insofern als die stärksten Diaphragmen immer auf der Mitte des Triebes, dagegen die schwächsten in den unteren und oberen Knoten ihren Platz haben.

Wichtig ist auch noch die Stellung des Diaphragma in den Knoten zu dem am Knoten sitzenden Blatte, beziehungsweise zur Knospe. Das Diaphragma tritt nämlich in den meisten Fällen so auf, dass dessen Fläche mehr der Knospe als dem Blatte zur Grundlage dient (Fig. 1, 2, 7, 8, 13) und beginnt also entweder unmittelbar unter der Transversalebene der Blattinsertion, oder mit der Ebene in gleicher Richtung, oder sogar in einzelnen Fällen auch oberhalb der Ebene.

Zuletzt muss ich noch bemerken, dass es bei der Messung des Diaphragma nicht gleichgiltig ist, ob wir es im grünen Zustande, in an der Luft getrocknetem oder endlich in mit Wasser ganz angesogenem Zustande messen. Meine Messungsdaten beziehen sich auf an der Luft getrocknete Diaphragmen. Sobald wir aber den Spross im Wasser weichen, saugen sich die Diaphragmen voll mit Wasser und es wächst vorzüglich ihre Dicke-Dimension. Mit diesen, zufolge verschiedenen Wassergehaltes sich zeigenden Unterschieden in der Dicke stimmt die Dimensionsverschiedenheit in den Diaphragmen zwischen Winter- und Frühjahrs-Trieben überein.

Mit diesem Wassergehalt hängt auch noch der Härtezustand des Diaphragma zusammen, denn Wasser enthaltend ist es immer weicher, als wenn es ganz trocken ist.

Bei oberflächlicher Betrachtung scheint es die Härte des

Holzes der Triebe, und zwar in seiner ganzen Ausdehnung, zu besitzen. Nach genauerer Untersuchung jedoch zeigt es sich, dass es etwas weicher ist als das Holz. Auch ist es in die Quere leichter zu zerschneiden, als der Länge nach.

Diese Beschaffenheit des Diaphragma hängt enge mit der anatomischen Construction desselben zusammen. Damit ich jedoch seine von den andern Markzellen abweichende Beschaffenheit und so seine Charakteristik um so genauer beschreiben könne, ist es nothwendig, dass ich in einigen Zügen das Markzellengewebe der dicotylen Holzgewächse charakterisiere.

II. Die anatomischen Verhältnisse der Diaphragmen.

Das Markzellengewebe im Allgemeinen besteht rein nur aus parenchymatischen Zellen, welche mehr oder weniger kugelrund oder vieleckig und ziemlich gross sind, 4—5mal grösser als die Holzparenchymzellen der sie umgebenden Gefässbündel. Ihre Grösse ist aber nicht gleich, denn in der Mitte finden sich die grössten vor und gegen den Rand des Markes werden sie immer kleiner (Fig. 14). In radialer oder tangentialer Richtung bilden sie für gewöhnlich keine Reihen, oder sie zeigen nur schwer erkennbar eine Anreihung in radialer Richtung.

Dagegen bilden sie der Länge des Stengels nach ziemlich gut erkennbare Reihen.* Zwischen den Zellen sind sowohl in Quer- als Längsschnitten gut erkennbare Intercellulargänge. Die Zellenwand verholzt in den meisten Fällen nicht, aber in vielen Holzgewächsen zeigt sie gut die Holzreaction.** Sie ist mehr oder weniger verdickt und zwar getüpfelt. Die Tüpfel sind meistentheils kreisförmig oder von kreisähnlicher Form, rundlich, eiförmig. Ihre Anordnung zeigt weder an der radialen, noch tangentialen, noch an der horizontalen Wand eine gewisse Ordnung (Fig. 14). Und nur an den Markzellen mancher Arten finden wir in dieser

* Dr. A. de Bary: Vergl. Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen u. Farne. Leipzig 1877. p. 418. Gries l. c. p. 231.

** G. Krasner: Ueber das Mark einiger Holzpflanzen. Inaug.-Diss. d. Univers. Basel. 2 Taf. Breslau 1884. — Dr. Franz Mentowich: Das Mark bei einigen Kletter-Pflanzen. Magyar Növénytani Lapok (Ungarische botan. Blätter). IX. Jahrg. 1885. pag. 65.

Hinsicht eine Ausnahme. Bei Vitis nämlich zeigen die Tüpfel an den Seitenwänden der Markzellen das Bestreben, sich in senkrechter Richtung auf die Achse des Stengels zu dehnen.*

Unter diesen Zellen kommen dann noch zufällig auch andere abweichende Zellen vor, weswegen Gries** homogene und heterogene Markzellengewebe unterscheidet. Diese Unterscheidung bezieht sich jedoch vorzüglich auf die Lebensthätigkeit der Markzellen. Die meisten Markzellen nämlich sterben noch im Jahre

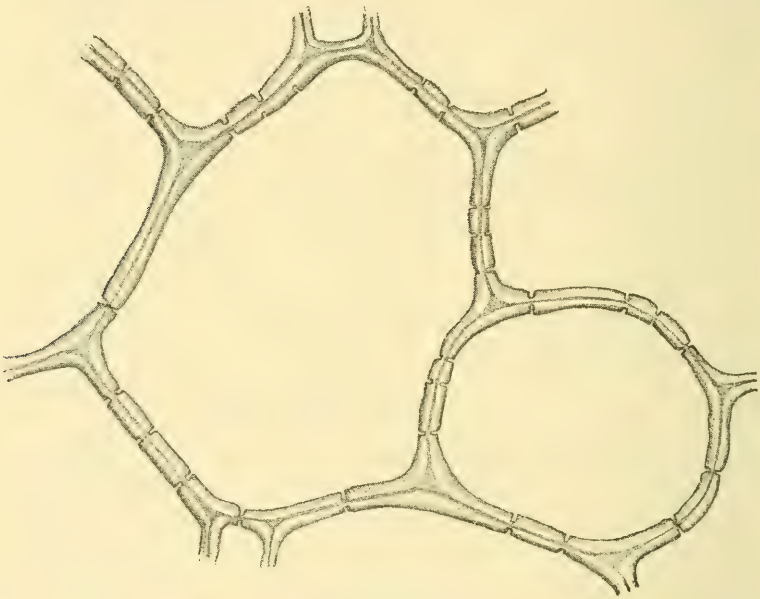


Fig. 14.

Vitis vinifera L. Querschnitt der Markzellen des Stengelgliedes. 400fach vergrössert.

ihrer Entstehung ab, ihr Inhalt wird aufgesogen und ihre Stelle nimmt Luft ein (cellules inertes), wieder in andern Fällen behalten sie lange, selbst bis 20 Jahre, ihre Lebensfähigkeit (cellules actives)*** und speichern jährlich in sich Stärkekörner, Gerbsäure u. s. w. als Reserve-Nährstoffe auf.

* D'Arbaumont: La tige des Ampelidées. Ann. d. sc. nat. Ser. VI. T. XI. p. 256.

** Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. p. 30.

*** l. c. pag. 29.

Dieses Mark wird dann von der Markscheide in der Dicke einiger Zellenschichten umschlossen, die Zellen derselben gehören zum Marke und sind unmittelbar in Berührung mit den primären Gefässbündeltheilen, respective mit der Markkrone und zwischen diesen mit den secundären Bündeltheilen.* Eben deshalb zeigen die die Markscheide bildenden Markzellen eine Abweichung von denen in das Innere des centralen Cylinders fallenden Markzellen, insofern sie in radiale und senkrechte Reihen gereiht sind, die

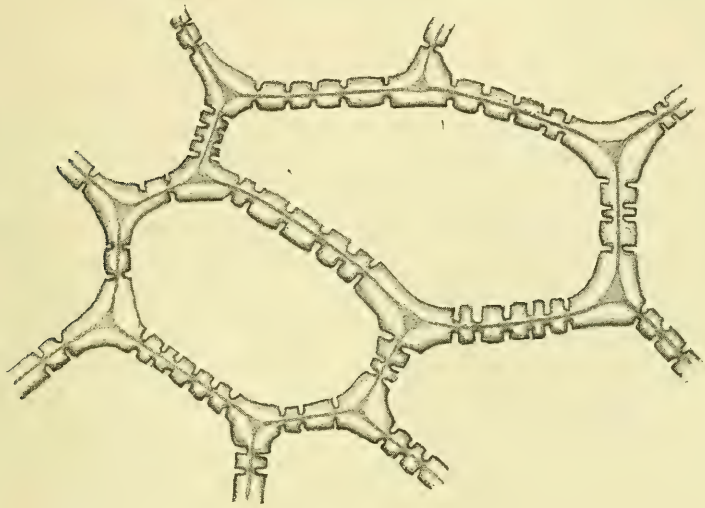


Fig. 15.

Vitis vinifera L. Querschnitt der Markscheide-Zellen. 400fach vergrössert.

Zellen selbst jedoch in ihrer Form mehr oder weniger noch den Markzellen ähnlich sind (Fig. 15). Ihre Wand indessen ist bedeutend dicker, ist immer verholzt und zeigt gut die Reaction des schwefelsauren Anilins oder des Phloroglucins. Ihre Zellenwände sind tüpfelartig verdickt, die Tüpfel sind entweder kreisförmig oder sie nähern sich mehr oder weniger der Spaltform und sind zahlreicher als an den Markzellen. Sie liegen auf den horizontalen Wänden so ziemlich ohne Ordnung, oder in einer nur

* Dr. A. de Bary: Vergl. Anatomie etc. Leipzig 1877. p. 419. — Dr. J. Wiesner: Elemente d. Anatomie u. Physiologie. II. Aufl. Wien 1888. pag. 117.

schwer wahrnehmbarer Ordnung in radialer Richtung. Auf denen in der Längenrichtung des Triebes stehenden Wänden bilden sie senkrechte Reihen, welche mit den primären Gefässen parallel sind, aber auch die Zellen selbst sind mehr oder weniger in der Längenrichtung gestreckt (Fig. 20, 25, 26). Die Tüpfelchen aber sind mehr spaltförmig und in der Richtung der Längenwand geordnet.

Sie bleiben lange lebend und enthalten Stärke oder einen andern Reserve-Nährstoff, welcher sich ebenso wie im Marke jährlich zu Anfang der Vegetationsperiode anhäuft und aus den Zellen verschwindet, um sich dann wieder in der Mitte und am Ende der Vegetationsperiode anzusammeln.

Obwohl die Zellen der Markscheide und die Zellen des Markes angrenzend sind, gehen sie dennoch nicht stufenweise in einander über, sondern es bleibt die Grenze zwischen beiden sehr scharf und die zwei nachbarlichen, abweichenden Zellengruppen kommen mit einander in unmittelbare Berührung (Fig. 25, 26).

Die Markzellen schliessen sich nur an die primären Markstrahlzellen mit stufenweisem Uebergange an und zwar in dieser Art, dass die Markzellen sich in der Nähe des Markstrahles in der Richtung des Markstrahles stufenweise ausdehnen, während die gänzlich radiale Reihen bildenden Markstrahlzellen ihnen nachfolgen. Dieser Dehnung entsprechend wird ihre Form auch immer mehr ziegelförmig, ihre Zellenwand aber verdickt sich immer mehr, je mehr sie sich dem Markstrahle nähern.

Die Zellenwände behalten ihre tüpfelförmige Verdickung, aber die Tüpfel sind mehr elliptisch geformt und reihen sich nach der Längenrichtung der Zellen, respective in der Richtung des Markstrahles. Die in der Nachbarschaft von Markscheide und Markstrahl befindlichen Markzellen sind aber an Flächenraum immer geringer, als die Zellen in der Mitte des Markes. Diese Zellen können wir daher als diejenigen betrachten, welche den Uebergang zwischen dem Marke und den in seinem Umkreise befindlichen Geweben bilden und die Verbindung bewerkstelligen.

Während wir aber einen solchen scharfen Contrast zwischen den Zellen des Markes und der Markscheide finden, ist der Unterschied zwischen den Zellen der Markscheide und des Diaphragma

kleiner, als zwischen den Diaphragmazellen einerseits, andererseits zwischen den Zellen des Markes. Im Allgemeinen erscheinen die Diaphragmazellen — abgesehen von der Form — ganz so wie die Zellen der Markscheide.

In der Nähe des Diaphragma gehen die Zellen des Markes stufenweise in die Zellen des Diaphragma über, insofern ihre Gestalt, welche bisher nach drei Richtungen so ziemlich gleichmässig ausgebildet war, allmählig nur in tangentialer und radialer Richtung ihre ursprüngliche Ausdehnung behält, in der Längenrichtung des Stengels aber sich vermindert und die Zelle platt wird. Daher kommt es, dass in dem Querschnitte des Diaphragma die Zellen mehr oder weniger die Form der Markzellen beibehalten, dagegen in dem Längenschnitt hievon abweichen (Fig. 16, 18). Dem zufolge erscheinen die Zellen in dem Längsschnitte des Diaphragma so, als wenn sie in radialer, respective tangentialer Richtung gestreckt wären und wir müssen sie auch mit Rücksicht auf den Zellendurchmesser in horizontaler Richtung als gedehnte erkennen und zwar mehr in radialer, als in tangentialer Richtung (Fig. 16, 19, 21, 22, 23). Diese Dehnung der Zellen tritt jedoch nicht gleichmässig bei dem Diaphragma einer jeden Art auf. Am meisten gedehnt sind sie in dem Diaphragma bei Vitis (Fig. 19), Broussonetia (Fig. 23), Clematis Flammula (Fig. 21), Deutzia gracilis (Fig. 22); hingegen giebt es einzelne Arten, deren Zellen weniger gestreckt sind, wie in dem Diaphragma bei Ficus (Fig. 16), Forsythia und Lonicera.

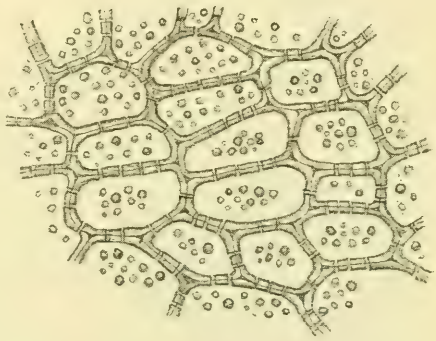


Fig. 16.

Ficus Carica L. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

In dem Diaphragma mancher Pflanzenart sind die Zellen insgesammt gedehnt, wie in den Diaphragmen bei Vitis (Fig. 19), Broussonetia (Fig. 23), Deutzia (Fig. 22), Clematis (Fig. 21). In den Diaphragmen bei Ficus (Fig. 16), Forsythia und Lonicera

finden wir unter den gestreckten Zellen auch kürzere, ja in dem Diaphragma bei Clematis Vitalba haben die Zellen kaum ihre Form geändert und sind kaum verschieden von der Form der Markzellen. Bei manchen Arten sind die Diaphragmazellen in der Mitte und am Rande die gedehntesten (Deutzia gracilis), während an den meisten die mittleren Zellen die wenigstgestreckten sind und gegen den Rand zu immer gestreckter werden, z. B. in dem Diaphragma bei Clematis Vitalba sind sie beinahe kugelförmig und strecken sich dann immer mehr gegen den Umfang

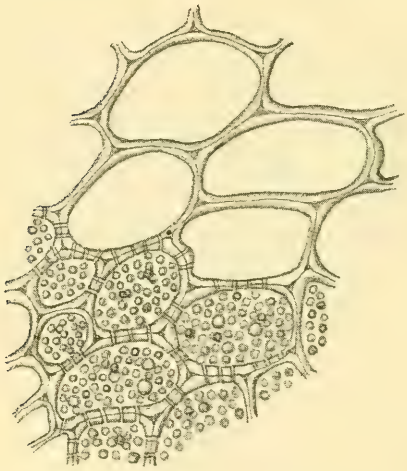


Fig. 17.

Ficus Carica L. Querschnitt der Markscheide- und Mark-Zellen. 200fach vergrössert.

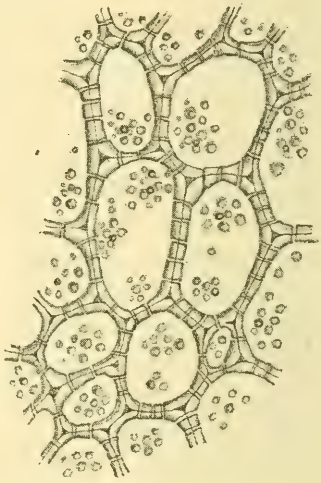


Fig. 18.

Ficus Carica L. Querschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

des Markes. Am wenigsten ist diese Zellendehnung zu beobachten in dem Diaphragma bei Symphoricarpus racemosus und Abelia floribunda.

Die Gestalt der Zellen des Diaphragma überblickend können wir sagen: während die Markzellen isodiametrisch sind, sind die Zellen des Diaphragma in radialer und tangentialer Richtung gestreckt. Für alle Fälle steht jedoch fest, dass in den Diaphragmen, mögen ihre Zellen entweder gleich oder verschieden geformt sein, mögen sie homogene oder heterogene sein, bei den dicotylen Holzgewächsen nie Gefässbündel vor-

kommen, wie solche in den Diaphragmen anderer Pflanzen zu constatieren sind.*

Der Gestalt entsprechend verändert sich auch jene Richtung, in welcher sich die Zellen an einander anschliessen, und stufenweise verändert sich auch die Form des Anschlusses. Während nämlich die Markzellen — wie ich erwähnte — mehr in der Längenrichtung des Stengels bestimmte Reihen zeigen, behalten die Diaphragmazellen mehr oder weniger auch diese Richtung bei, reihen sich aber vorzüglich in radialer Richtung (Fig. 16, 19, 21, 22, 23), was insbesondere an dem Längsschnitt gut zu ersehen

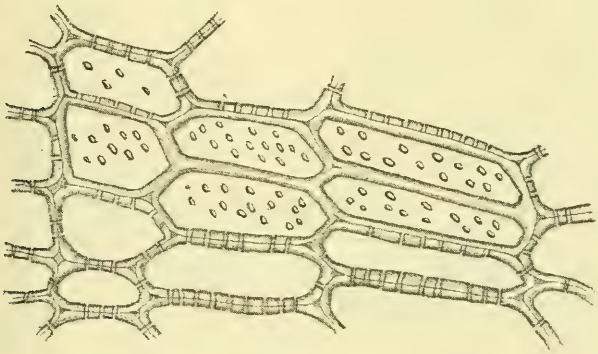


Fig. 19.

Vitis vinifera L. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

ist, obgleich es Arten giebt, an welchen diese Anreihung kaum bemerkt werden kann.

Dieser Anreihung entsprechend schliessen sich die Zellen in einer von den Markzellen abweichenden Weise an einander. Die horizontalen Wände der Markzellen sind mehr oder weniger parallel, grossentheils sind auch die horizontalen Wände der Diaphragmazellen parallel, obwohl es häufig der Fall ist, dass diese horizontalen Wände sich gegen einander neigen.

Die Zellenwände, welche die Markzellen in der Längenrichtung von einander trennen, sind so ziemlich parallel zur Längen-

* Dr. A. B. Frank: Lehrb. der Botanik. Leipzig 1892. Bd. I. p. 206—207. — Gefässbündel enthaltende Diaphragmen haben die Equisetaceen, Gramineen, Umbellifereen(?), ferner Dipsacus und Taraxacum(?).

achse des Triebes. Diese Seitenwände der Diaphragmazellen keilen sich mehr oder weniger zwischen ihre Seitennachbarn ein. Die Zellen bei Vitis (Fig. 19), Deutzia (Fig. 22), Clematis Flammula (Fig. 21) zeigen genug deutlich diese Art des Anschlusses, bei andern Arten, wie bei Ficus (Fig. 16), Broussonetia (Fig. 23), Forsythia und Lonicera kommt diese Anschlussart weniger zur Geltung.

Noch mehr unterscheiden sich jedoch die Diaphragmazellen von den Markzellen betreffs der Verdickung der Zellwände. Es

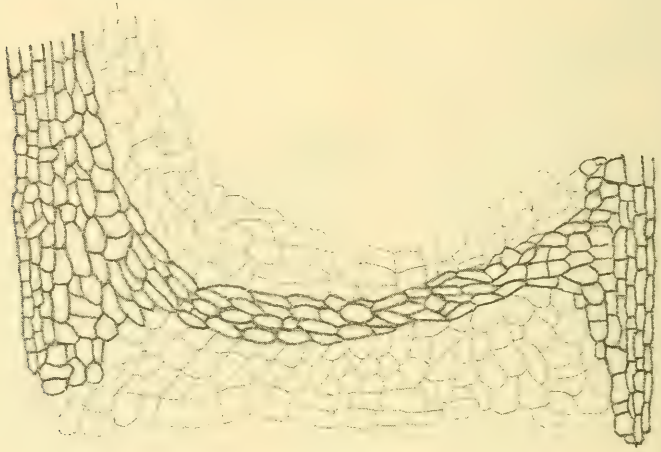


Fig. 20.

Clematis Flammula L. Diaphragma mit Markscheide im Median-Längsschnitt. 52 fach vergrössert.

ist wahr, dass auch die Wand der Markzellen verdickt ist, aber diese Verdickung bleibt weit zurück hinter der Verdickung der Diaphragma-Zellwände. Die Diaphragma-Zellwände zeigen vorzüglich gegen die Seitenränder des Diaphragma bei manchen Arten eine grössere Verdickung, als in der Mitte, so ist es bei Vitis (Fig. 19), bei anderen Arten dagegen zeigt sich eine solche Abweichung nicht, ja die Zellen sind sogar in der Mitte mehr verdickt. Und nur als Ausnahme ist ein solches Diaphragma anzusehen, dessen Zellwände nicht viel dicker wären, als die der Markzellen, wie eine solche Ausnahme das Diaphragma von Lonicera Caprifolium zeigt. Die Verdickung ist auch hier, wie bei den andern Markzellen, tüpfelartig. Die

Tüpfel der Markzellen sind jedoch rund oder mehr oder weniger unregelmässig in die Länge gezogen (Fig. 14) und lagern sich beinahe immer ohne jede Ordnung ab. Die Tüpfel der Zellen des Diaphragma sind nie rund, sondern immer elliptischrund, ja sogar spaltförmig, ferner reihen sie sich mit Ausnahme der horizontalen Wände, an welchen die regelmässige Anreihung nicht beständig ist, immer in der Dehnungsrichtung der Zellen und zwar so, dass die Spalten entweder parallel und quer verlaufen, oder aber, was häufiger ist, schief stehen (Fig. 19).

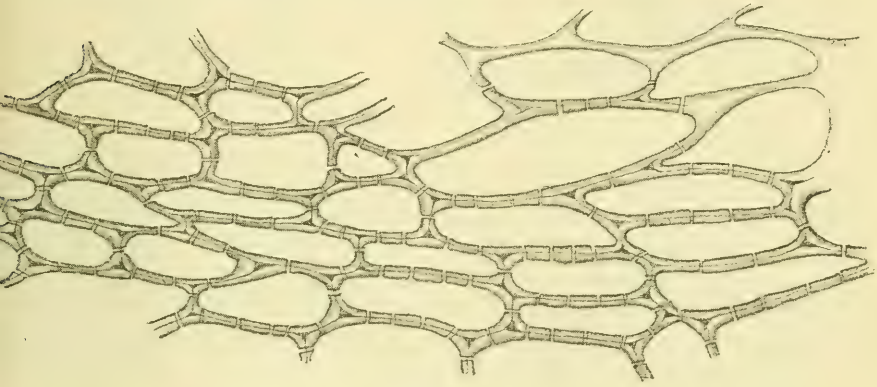


Fig. 21.

Clematis Flammula L. Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Die Zellen des Diaphragma schliessen sich entsprechend ihrer Gestalt eng an einander und bilden im Gegensatz zu den Markzellen wenige und sehr enge Intercellulargänge, oder es sind solche zwischen ihnen überhaupt nicht zu finden (Fig. 16, 18, 20, 21, 22, 23, 31, 32).

Die Zellen des Diaphragma kommen der Begrenzung des Diaphragma entsprechend mit den Markzellen, ferner mit den Zellen des Markstrahles und der Markscheide in Berührung.

Die Markzellen gehen in die Zellen des Diaphragma dadurch stufenweise über, dass ihre Gestalt sich stufenweise plattet, respective sich mehr ausdehnt. Diesem gestaltlichen Uebergange steht entgegen der scharfe Gegensatz bezüglich der Dicke, insofern an einer bestimmten Grenze die schon sehr verdickten Zellen mit den noch nicht verdickten in Berührung treten (Fig. 21), und

diese plötzliche Differenzierung entwickelt sich auch noch in dem Falle, wo das Diaphragma nur wulstartig zur Ausbildung gelangt, wie bei Philadelphus pubescens (Fig. 8).

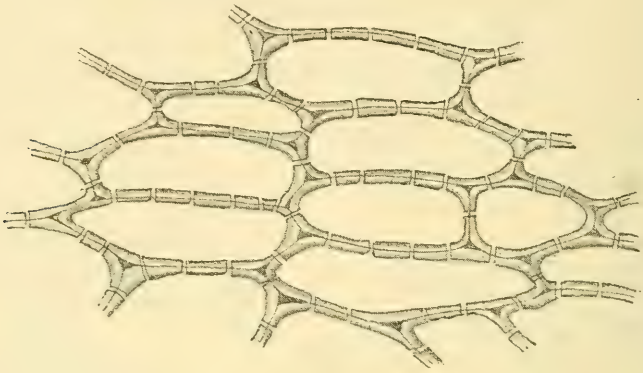


Fig. 22.

Deutzia gracilis S. et Z. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Mit dem Markstrahl verknüpfen sich die Zellen des Diaphragma stufenweise, indem die Markstrahlzellen auch in Betreff ihrer gestaltlichen und sonstigen Eigenschaften so ziemlich mit den Diaphragmazellen übereinstimmen, ausgenommen, dass die Gestalt der Markstrahlzellen entschieden ziegelförmig ist.

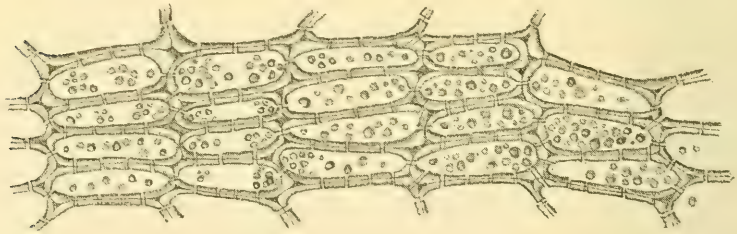


Fig. 23.

Broussonetia papyrifera VENT. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Hingegen ist der Uebergang in die Zellen der Markscheide nicht stufenweise, da die Zellen des Diaphragma in radialer Richtung, die Zellen der Markscheide aber in Längsrichtung gedehnt sind, so dass an der Berührungsstelle zwischen den zweien entweder der vorerwähnte Lagerungsunterschied vorhanden ist, oder

aber es lagern sich an den Berührungs- respective Verschmelzungsstellen schiefstehende Zellen ab (Fig. 20). Die Tüpfel der Diaphragmazellen entwickeln sich in der Ebene des Längenschnittes in radialer Richtung, wohingegen dieselben an den Zellen der Markscheide sich in der Längsrichtung des Stengels anreihen.*

In einem stimmen jedoch sowohl die Zellen des Diaphragma, wie auch die des Markstrahles und der Markscheide überein, dass sie nämlich mit Reserve-Nahrungsstoffen erfüllt sind und zwar beinahe ausschliesslich mit Stärkemehl (Fig. 17, 18, 22, 23, 24), zuweilen mit Gerbsäure, ja auch mit fettartigen Stoffen, ferner, dass ihre Zellenwände gleichmässig gut und deutlich die Holzreactionen zeigen.

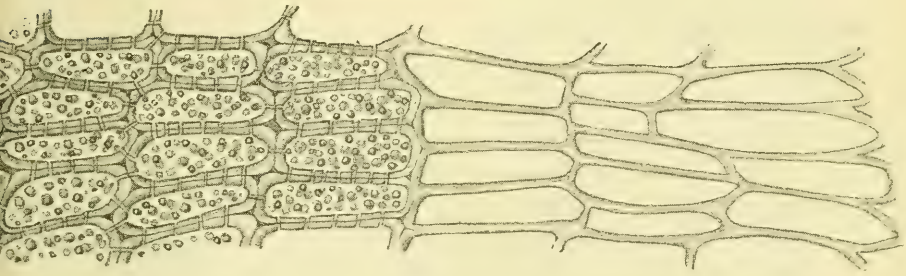


Fig. 24.

Philadelphus pubescens Loisl. Längsschnitt der Zellen des wulstartigen nodalen Diaphragmas. 200fach vergrössert.

In dem Diaphragma findet man ausser den geschilderten Zellen noch andere auch in dem Marke vorkommende Zellen, z. B. Krystalle führende Zellen (Broussonetia, Forsythia u. s. w.), welche gewöhnlich grösser sind, als die sie umgebenden Zellen und ihre Wand bleibt meistentheils dünn; ferner Milchröhren (Ficus, Broussonetia), deren Wand sich nicht verholzt.

Die gesammten Diaphragmazellen haben ferner die Befähigung, eine grosse Menge Wasser in sich aufzunehmen. Von dieser ihrer Fähigkeit können wir uns leicht überzeugen, wenn wir sie künstlich getrocknet wieder in das Wasser bringen. Sonst aber kann

* Die gestaltliche Uebereinstimmung der in den röhrigen Stengeln an dem Markumfange stehenden engern Markzellen mit dem primären Markstrahl-Parenchyme erwähnt auch de Bary: Vergl. Anatomie p. 419.

man zur Zeit der Vegetation, insbesondere zu Anfang derselben von der Wassermenge leicht Ueberzeugung gewinnen.*

Da der Charakterzug der Diaphragmazellen in vieler Beziehung mit dem der Markscheidezellen übereinstimmt, erscheinen diese bei makroskopischer Untersuchung mit jenen übereinstimmend und das Diaphragma scheint gleichsam die Fortsetzung der Markscheide zu sein.

III. Die Bildung der Diaphragmen.

Die Markdiaphragma-Zellen sind hinsichtlich ihrer Lage und ihres Ursprungs eigentlich Markzellen, desshalb sind sie am Anfang ihrer Bildung und Entwickelung übereinstimmend mit den Markzellen.

In dem Vegetationskegel und in den von den obersten Blatthöckern entstandenen Knoten besteht das Mark aus gänzlich gleichförmigen Zellen und ist vollkommen gleichartig. Noch unterhalb des Vegetationskegels respective in den 1—2 Knoten unterhalb der Endknospe verbleibt diese Gleichartigkeit des Markes. Die Markzellen bestehen um diese Zeit aus sehr dünnwandigen, in der Richtung der Längsachse des Triebes mehr verkürzten, daher verflachten engschliessenden Parenchymzellen, welche sich in senkrechte, ja einigermassen strahlige Reihen ordnen. In dem weiter unten gelegenen Stengeltheil jedoch geschieht schon sehr zeitig die Dehnung der Stengelglieder zufolge des intercalaren Wachsthums. Unter dieser Dehnung verändert sich besonders die Gestalt der internodalen Markzellen, insofern ihre platte Gestalt allmählig isodiametrisch, ja sogar nach Ort und Zeit eine in der Längenrichtung des Triebes gestreckte wird und es bilden sich die schizogenen Intercellulargänge. Aber die nodalen Zellen verändern kaum ihre Lage und ihre Gestalt, weil sich das in den Knoten befindliche Mark kaum oder nur sehr wenig dehnt.**

In diesem Zeitabschnitte der Dehnung, also zu Anfang des intercalaren Wachsthums tritt in den noch lebenden internodalen und nodalen Markzellen die Verdickung ein. Die Dehnung hält

---

* A. Prunet: Comptes rendus. T. CX. jan.—juin 1890. p. 594.

** Krasser l. c.

aber noch weiter an und erreicht das Maximum — wonach die internodalen Markzellen ihre Thätigkeit allmählig verlieren, ihr Inhalt wird aufgesogen und sie sterben ab, ja zufolge grösserer Dehnung reissen sie von einander und gehen zu Grunde, so dass an ihrer Stelle eine leere Röhre entsteht oder das Mark fächerig wird.*

Der Knoten selbst aber dehnt sich sehr wenig und nur zu Anfang der Dehnung der Internodien — so, dass die Internodien noch intercalarisch wachsen, hingegen der Knoten schon die Dehnung eingestellt hat. Diese Dehnung des Knotens hat jedoch keinen Einfluss auf die Gestalt der innerhalb des Knotens befindlichen Markzellen, weil den, infolge der Dehnung entstandenen Raum die durch die Theilung entstandenen Zellen einnehmen.

In dieser Zeitperiode unterscheiden sich die Diaphragmazellen nur in der Gestalt von den andern Markzellen. Während jedoch die Markzellen eben zufolge Beschränktseins ihres Lebens ihre weitere Verdickung einstellen, setzen die Diaphragmazellen ihre Verdickung so lange fort, bis sie sich vollständig ausgebildet haben und bis mit dem Fortschritt der Vegetationsperiode in ihnen die Aufspeicherung der Reserve-Nährstoffe beginnt.

Diesen Verlauf der Entwickelung des Diaphragma können wir deutlich beobachten in den jüngsten Knoten der im Herbste sich entwickelnden Sprossen: die auf den mit Stärkemehl angefüllten und aus verholzten dickwandigen Zellen bestehenden Diaphragmen folgenden jüngeren Diaphragmazellen sind schon weniger mit Stärkemehl angefüllt. Die Menge des Stärke-Inhaltes nimmt ab in dem jüngern Alter des Diaphragma, d. h. je jünger es ist, also je näher es zur Spitze des Triebes steht, desto geringer ist sein Stärkegehalt. Schliesslich folgt schon ein solches Diaphragma nach oben an dem Triebe, in welchem kein Stärkemehl mehr zu finden ist, aber die Zellenwände sind noch dick und verholzt. In noch höher gelegenen jüngeren Diaphragmen sind die Zellenwände noch verdickt, aber nicht mehr verholzt; bis endlich die jüngsten sich nur in der Gestalt der Zellen von den übrigen Zellen des Markes unterscheiden. Die Zellen des allerletzten und schon zur End-

* A. de Candolle: Anleit. z. Studium d. Botanik. Neubearbeitet von Dr. A. v. Bunge. Leipzig 1844. p. 40.

knospe gehörigen Diaphragma unterscheiden sich in gar nichts mehr von den übrigen Markzellen. So ist dies z. B. bei den Vitis-Arten.

Grösstentheils ist dies das allgemeine Bild der Bildung des Diaphragma, respective des Markes.

Es giebt jedoch viele Abweichungen von dieser allgemeinen Regel. In erster Reihe muss ich hervorheben, dass die Differenzierungen in den Diaphragmazellen bei manchen Arten schon an dem unterhalb der Endknospe befindlichen Knoten eintreten (Ficus), an andern Arten wieder nur an dem 4—5ten Knoten (Vitis).

Die intercalare Dehnung wirkt jedoch nicht nur modificierend auf die Markzellen, sondern bestimmt mehr oder weniger die Grenze des Diaphragma. Bekanntlich breitet sich die intercalare Dehnung nicht gleichmässig und auf einmal auf alle Punkte des Stengelgliedes aus. In den meisten Fällen fällt das Maximum der Dehnung etwas höher als auf die Mitte des Stengelgliedes, es kann aber dieses Maximum auch in die Nähe der Spitze, ja sogar in den untern Theil des Stengelgliedes fallen.* Wenn das Dehnungs-Maximum in die Mitte des Stengelgliedes fällt, so entwickelt sich die obere und untere Fläche der Diaphragmen annähernd gleich (Broussonetia, Forsythia, Lonicera). Wenn das Maximum der Dehnung in den obern Theil des Stengelgliedes gelangt, dann ist beim Diaphragma die obere Fläche eben, die untere Fläche aber concav (Ficus), endlich, wenn die Intensität der Streckung in den unteren Theil des Stengelgliedes fällt, so ist die obere Fläche des Diaphragma concav, die untere aber eben (Vitis, Clematis Flammula). Von diesen Erscheinungen kann man sich leicht Ueberzeugung verschaffen, wenn wir die im Dehnen begriffenen Stengelglieder mit Tuschlinien in gleichen Abständen bezeichnen. Diese Linien werden sodann dort am entferntesten von einander liegen, wo die Dehnung die grösste war. Von dieser Erscheinung kann man sich übrigens auch auf praktischem Wege Kenntniss verschaffen; bekanntlich bricht beim starken Biegen der grüne Sprössling der Weinrebe oberhalb des Knotens, also oben nächst

* Ph. van Thieghem: Traité de Botanique. Paris 1884. p. 264. — Dr. J. Wiesner: Elemente d. Anat. u. Physiologie d. Pflanzen. II. Aufl. Wien 1885. p. 244.

dem Diaphragma sehr leicht und zwar einfach deshalb an dieser Stelle, weil hier an dem Stengelgliede das Dehnungs-Maximum ist und zugleich das Maximum der Anschwellung (Turgescenz) der Zellen, wonach sie zufolge ihrer Ansteifung der Biegung am wenigsten zu widerstehen vermögen und leicht abbrechen. Zu derselben Zeit haben aber schon die Markzellen des unter dem betreffenden Diaphragma befindlichen Stengelgliedes das Maximum ihrer Wanddicke mehr oder weniger erreicht.

Sobald die Zellen des Diaphragma die volle Entwickelung in ihrem Wachsthume und in der Verdickung ihrer Wände erreicht haben, — beginnt auch schon in ihnen die Aufspeicherung der Stärke-Körnchen.

IV. Die Bedeutung des Markdiaphragma.

Die vorher beschriebenen anatomischen Merkmale heben so sehr die Zellen des Markdiaphragma der dicotylen Holzgewächse hervor, dass, nachdem zwischen den anatomischen Merkmalen der den Pflanzenkörper bildenden Zellen und zwischen irgend einer Lebensthätigkeit der Pflanze immer irgend welcher bestimmter Zusammenhang sein muss, ich mich mit Recht angeeifert fühle, in diesem Falle nach der Lebensthätigkeit zu forschen, zu deren Ausübung die Diaphragmen berufen sind.

Mit Rücksicht auf die anatomischen Merkmale der Diaphragmen und deren Placierung in dem Pflanzenkörper, können wir dieselben besonders aus zwei Gesichtspunkten zum Gegenstand unserer Untersuchung machen, nämlich aus dem Gesichtspunkte der Aufspeicherung des Nahrungsstoffes und hinsichtlich der Festigung des Pflanzenkörpers.

1. Das Markdiaphragma als Speicher-Gewebe.

Aus den im Vorangegangenen mitgetheilten Untersuchungsresultaten geht zur Genüge hervor, dass die Diaphragmazellen zu Ende der Vegetationsperiode, also in der sogenannten Ruhezeit der Pflanzen mit Stärkekörnchen angefüllt sind, ebenso wie die mit ihnen in Berührung stehenden Markscheide- und Markstrahl-Zellen, oder wie die lange am Leben bleibenden Markzellen mancher anderer Holzgewächse.

Diese Stärkekörnchen verschwinden jedoch bei Eintritt der Vegetation, also zur Frühjahrszeit, wo die Bäume zu treiben anfangen, sie werden verbraucht und ihren Platz nimmt grösstentheils Wasser ein, so dass wir in einer gewissen Zeitperiode vergeblich darin Stärkekörnchen suchen. Diese können wir demnach nur für Reserve-Nährstoffe halten und deshalb die Diaphragmazellen für Speicher-Zellen, das markgewebeartige Gewebe in den Diaphragmen aber für Speicher-Gewebe ansehen.

Diese Bedeutung behält das Diaphragma-Gewebe sehr lange Zeit. Zu dessen Bekräftigung kann ich erwähnen, dass ich an einem 12jährigen Weinstocke, an dessen Wurzeln schon die Roesleria schmarotzte und an einem im Budapester botanischen Garten gewachsenen 20jährigen Weinstocke, in den untersten Diaphragmen noch Stärkemehl gefunden habe. Das 5jährige Diaphragma von Ficus Carica, das 8jährige von Forsythia suspensa war noch im Verlaufe des Winters voll von Stärkekörnern.

Dass sich aber in ihm eine nicht unbedeutende Menge dieses Reserve-Nährstoffes ansammelt, geht aus der Erscheinung hervor, dass, wenn sich in ihnen nicht der aufgespeicherte Nahrungsstoff anhäuft, das Ausschlagen der in seiner Nähe befindlichen Blattknospe unterbleibt. Die Knospen solcher Knoten bei Lonicera occidentalis Hook. und L. Kamschatica Hort. haben nicht ausgetrieben, deren Diaphragmagewebe Stärkekörnchen nicht enthielten. Dasselbe kann man auch an Weinstöcken sehen, deren im Spätherbste entwickelte Sprossen eine hinreichende Menge von Reserve-Nahrungsstoff in ihren Endknoten nicht mehr aufspeichern konnten, dem zufolge auch nicht fähig sind, Blattknospen zu entwickeln und im Frühjahr auszutreiben, abgesehen davon, dass dieselben deshalb, weil sie nicht zur genügenden Reife gelangten, in der Winterkälte auch leicht zu Grunde gehen.

Hieraus folgt, dass der in den Diaphragmen angesammelte Nahrungsstoff in erster Reihe auch zur Nahrung der an den Knoten befindlichen Blattknospen dient. Ein weiterer Beweis dafür ist auch, dass das Diaphragma in der Nähe der Knospen dicker ist und dass bei den wulstartigen unvollständigen Diaphragmen der der Knospe zugewendete Theil dicker ist. Es beweist dies aber auch die Aufzehrung des Nahrungsstoffes. Dies

kann man sehr schön bei Forsythia suspensa sehen, mit deren zeitig im Frühjahr erscheinenden Blüthen in derselben Zeit aus dem Markstrahl und dem Markdiaphragma die Stärke abnimmt, obgleich sie noch in der Markscheide und in den Holzparenchym-Zellen vorhanden ist, um dann bei der Entwickelung des die Blätter tragenden Sprossen verbraucht zu werden. Die Reihenfolge in dem Verbrauch der Reserve-Stärke des Triebes verglichen mit den Forschungen Dr. A. Fischer's wäre folgende: Die Rinde, die Markscheide, der Markstrahl und das Markdiaphragma und erst nachher das Holzparenchym*, was mit meiner Beobachtung nicht gänzlich übereinstimmt. Ich muss jedoch bemerken, dass sich dies so nur an solchen Knoten verhält, an welchen die Blüthen erscheinen; in den Diaphragmen, welche unterhalb der die Blüthe tragenden Knoten liegen, ist zur Blüthezeit die Stärke noch unberührt und beginnt erst verbraucht zu werden zur Zeit, wo die Blätterknospen ausschlagen. In den Diaphragmen solcher Triebe, welche entwickelte Blätter tragen, findet man im Frühjahr nirgends eine Spur von Stärke. Hingegen an solchen Pflanzen, welche früher ihre Blätter entwickeln, verschwindet gleichzeitig mit der Blattentwickelung aus sämmtlichen Diaphragmen der Stärkeinhalt. Dieser Bedeutung der Diaphragmen müssen wir zueignen seine Eigenthümlichkeit in der Gestalt, dass es an der gegen die Unterlage des Blattes, respective der Blattknospe zugewendeten Seite, insbesondere, wenn es sich nur in einem einblattigen Knoten entwickelt, um vieles breiter ist, als in dem andern Theile (Vitis, Ficus, Coronilla).

Die Einrichtung der Diaphragmazellen als Wasser-Reservoire hat auch Prunet** schon nachgewiesen und so kann ich von der Erklärung dieser Bedeutung absehen. Im Uebrigen fällt dieser Umstand unter denselben Gesichtspunkt, wie die Aufspeicherung des aus Stärke bestehenden Reservestoffes. Beide Stoffe dienen zur Deckung des eintretenden Bedarfes. Und so ist das Diaphragma eigentlich das für die Aufspeicherung zweier Stoffe dienende Gewebe. Und zwar enthält es diese zwei Stoffe abwechselnd in zwei ver-

* Beitr. z. Physiologie d. Holzgewächse. Jahrb. d. wiss. Bot 22. Bd. 1891. p. 110.

** Comptes rendus T. CX. 1890. p. 594.

schiedenen Zeitperioden. Nämlich in der ersten Entwickelungsperiode, wenn es noch jung ist, enthält es hauptsächlich Wasser, sodann im ausgebildeten Zustande vielmehr nur Stärke. Das ausgebildete Diaphragma endlich enthält in der Ruhezeit Stärkemehl, dagegen in der Vegetationsperiode, insbesondere zu Anfang vorzüglich Wasser. Sein Wassergehalt verändert sich jedoch demgemäss, je nachdem die Pflanze weniger oder mehr benöthigt.*

Nebenbei erwähne ich als charakteristische Eigenthümlichkeit, dass das Diaphragma, welches als Speicher-Gewebe in erster Reihe die Entwickelung der in seine Nähe fallenden, respective zu ihm gehörigen Seitenbildungen zu fördern berufen ist, oft zufolge gewisser Beschädigungen sich einfach nicht mit Reserve-Nahrungsstoff füllt und seiner diesbezüglichen Aufgabe nicht entsprechen kann. Insbesondere die in der Nähe des Diaphragma beigebrachten Wunden, auch wenn sie während der Vegetationsperiode vernarben, verursachen es, dass sich die in ihrer Nähe befindlichen Diaphragmazellen nicht mit Stärkekörnchen anfüllen. Dies ist sodann eine der Ursachen, dass in diesem Falle, wenn auch die meisten Knospen des Triebes sprossen, einzelne sich nicht entwickeln.

Die Bedeutung des Diaphragma als Speicher-Gewebe ist um so wichtiger, weil sie wie aus der früher mitgetheilten Tabelle ersichtlich ist, bei solchen Pflanzen vorkommt, deren sonst sehr entwickelte Markzellen entweder sehr zeitig absterben, oder aber in Folge Zerreissung zu Grunde gehen und so als Speicher-Gewebe für die Ernährung der Pflanzen keine Bedeutung haben können. Dieses abgestorbene Mark ersetzen die Diaphragmen und wir müssen sie für die Vertreter des ganzen Markes halten.

Das Mark als solches hat aber nur im lebenden Zustande Bedeutung, worauf auch schon DE CANDOLLE**, HARTIG***, GRIES†, PRUNET†† u. s. w. hingewiesen haben, aber die Bedeutung

---

* PRUNET l. c. p. 594.

** A. P. DE CANDOLLE: Vorl. ü. Bot. I. Bd. 1828. p. 147.

*** THEOD HARTIG: Vergl. Unters. ü. den Gehalt der wichtigsten Holzarten. Berlin 1893. p. 211.

† Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. Paris 1872. p. 53.

†† Comptes rendus T. CX jan.—juin 1890. p. 594.

der Diaphragmen, wonach diese das ganze Mark ersetzen, hat nur GRIES geahnt, doch in seiner vollen Bedeutung nicht gewürdigt.

2. Die mechanische Bedeutung des Markdiaphragma.

Aus der Rolle, welche dem Diaphragmagewebe als Speicher-Gewebe zufällt, kann man aber noch nicht erklären die eigenthümliche Gestalt und die Anordnung seiner Zellen, die Dicke seiner Zellwände, die Anordnung der Tüpfel und auch nicht die eigenthümliche Gestalt des Gewebes selbst. Um die Bedeutung dieser Eigenthümlichkeiten des Diaphragma und seiner Zellen zu beurtheilen, habe ich jene Bedeutung gewisser Pflanzengewebe, welche die Festigkeit des Pflanzenkörpers bezwecken, in Erwägung gezogen.

SCHWENDENER* war bekanntlich der erste, der sich mit der specifisch mechanischen Einrichtung der monocotylen Gewächse befasste. Nach ihm machten Viele die die Festigkeit der Pflanzen bezweckenden Einrichtungen zum Gegenstande ihrer Forschungen. Unter diesen hat TSCHIRCH** auch darauf hingewiesen, dass nicht nur die „specifisch mechanischen Zellen", als Bastfasern, Libriform- und Collenchymzellen, sondern im Allgemeinen „die stark verdickten Zellen", welche in den Vegetationsorganen der Pflanzen vorkommen, eine mechanische Funktion haben*** und nennt solche dickwendige Zellen *Sclereiden* zum Unterschiede von den *Stereiden* (Bastfaser, Collenchym, Libriform). Nun aber entwickeln sich nach Auffassung TSCHIRCH's mechanische Elemente überall dort, wo sie aus dem Gesichtspunkte der Druck-, Zug-, und Biegungs-Festigkeit nothwendig sind, und dabei ist ganz gleichgiltig, aus welchen Gewebeelementen sie sich entwickeln.† Die Bekräftigung dieses Schlusssatzes sieht er in der Rolle der dickwandigen Zellen der Rinde.

Eine derartige Aufgabe der dickwandigen Zellen ist jedoch nicht leicht in jedem Falle nachzuweisen, denn sie ist zufällig

* Das mechanische Princip im anat. Bau d. Monocotylen Leipzig 1874.

** Beitr. z. Kenntniss d. mech. Gewebesystems d. Pflanzen. Jahrb f. wiss. Botanik. Bd. XVI. 1885. p. 73.

*** l. c. p. 306.

† l. c. p. 304.

auch durch Einrichtungen für die Vollstreckung einer andern Aufgabe verdeckt, aber die Dicke ihrer Wand zeigt jedenfalls, dass sie eine mechanische Funktion haben oder hatten und nichts zeigt darauf, dass sie nur allein zum Nahrungszwecke sich zu solchen entwickelten.*

Die Zellen, welche die Diaphragmen bilden, können zwar nicht gänzlich als Sclereiden bezeichnet werden, aber wir finden in ihrer Construction und Anordnung viele solche Merkmale, welche gerade auf ihre mechanische Bedeutung hinweisen. Für so ein Merkmal muss ich halten die in radialer Richtung gestreckte Gestalt der Diaphragmazellen**; ferner die Einkeilung der Zellen mehr oder weniger in einander (Fig. 19), welche Eigenschaften lebhaft an die Eigenheit der speziell mechanischen Elemente, der Stereiden, erinnern; sodann die beträchtliche Wanddicke, welche sich unnöthig zum Zwecke der Anhäufung von Reserve-Nahrungsstoffen entwickeln würde und die spaltartige Form der Tüpfel, wie deren Anordnung, welche letztere zum Beweise dessen dient, dass sich die moleculare Struktur der Zellwand in der Längsrichtung entwickelt hat.*** Obzwar auch dies unzweifelhaft ist, dass die Form und Anordnung der Tüpfel im Zusammenhange mit der Dehnung der Zellen in radialer Richtung und in Verbindung mit der Transportierungsrichtung des gelösten Nahrungsstoffes stehen.† Wenn wir noch ausser diesen in Berücksichtigung ziehen die Art, wie sich das aus so geformten Zellen bestehende Gewebe an die sie umgebenden Gewebe, also an die mehr oder weniger verholzte Wand der übrigen Zellen des Sprosses anschliesst, — tritt deutlich hervor, dass die Diaphragmen eine befestigende Bedeutung haben.

Noch mehr geht diese Bedeutung aus jener Thatsache hervor, dass ihre Entstehung, ihre Anordnung nur allein auf Grund mechanischer Principien erklärt werden können.†† Es tritt dies

* Tschirch l. c. p. 306.

** Schwendener l. c. p. 4.

*** Schwendener l. c. p. 5. 8. — Dr. G. Haberlandt: Physiolog. d. Pflanzenanatomie. II. Aufl. Leipzig 1896. p. 137.

† D'Arbaumont l. c. p. 206.

†† Tschirch i. m. Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. XVI. p. 303.

deutlich ans Licht, wenn wir diese nodalen Diaphragmen mit irgendwelchem internodalen Diaphragma vergleichen. Als ausgezeichnetes Beispiel dient hiezu der Trieb von Liriodendron tulipifera L. (Fig. 12), in dessen internodalem Marke wir ziemlich dicht gut entwickelte, obgleich dünne Diaphragmen finden. Die Gestalt dieses internodalen Diaphragma ist auch höchst charakteristisch. Mit einem wenig vortretenden Kreissaum stützt es sich an die das Mark umgebende Markscheide, wird dann dünner, um in dem mittlern Theil wieder dicker zu werden (Fig. 25). Es zeigt ganz die gut construierte Form einer Aussteifungseinrichtung einer Säule. Der Anschluss seiner Zellen zeugt auch für eine solche Bedeutung, denn sie verschmälern sich stark sogleich bei ihrem Anschlusse an die Markscheide und dehnen sich in radialer Richtung bei gleichzeitiger Verdickung ihrer Wände (Fig. 26). In der Mitte des Diaphragma finden wir sodann von den jetzt erwähnten Zellen umgebene mächtig entwickelte Sclereiden (Fig. 25, 27), welche schon Zellen von ausgeprägter mechanischer Rolle sind, so dass wir das Diaphragma von Liriodendron seiner Form und Anordnung nach, wie auch wegen dem Bau seiner Zellen für eine mechanische Einrichtung halten müssen.

Eine ähnliche Bedeutung haben die in den Knoten befindlichen Diaphragmen, wenn gleich in ihnen nur tüpfelartig verdickte Zellen und nicht

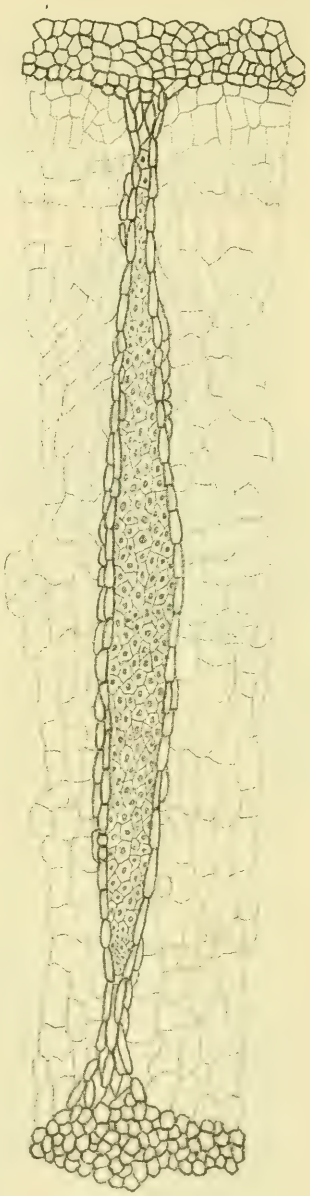


Fig. 25. *Liriodendron tulipifera* L. Längsschnitt eines internodalen Diaphragma. 52fach vergrössert.

zugleich auch Sclereiden vorkommen, obwohl man in dem Diaphragma der Paulownia auch Nester von Brachysclereiden findet (Fig. 11). Diese Verhältnisse und im Allgemeinen die Art des Markes selbst und seiner Construction deuten in gewissem Maasse auf eine mechanische Rolle, wenn auch diese Rolle grösstentheils nichts anderes ist, als eine Beihülfe zur Verstärkung des statischen Gleichgewichtes in den Theilen des Triebes.*

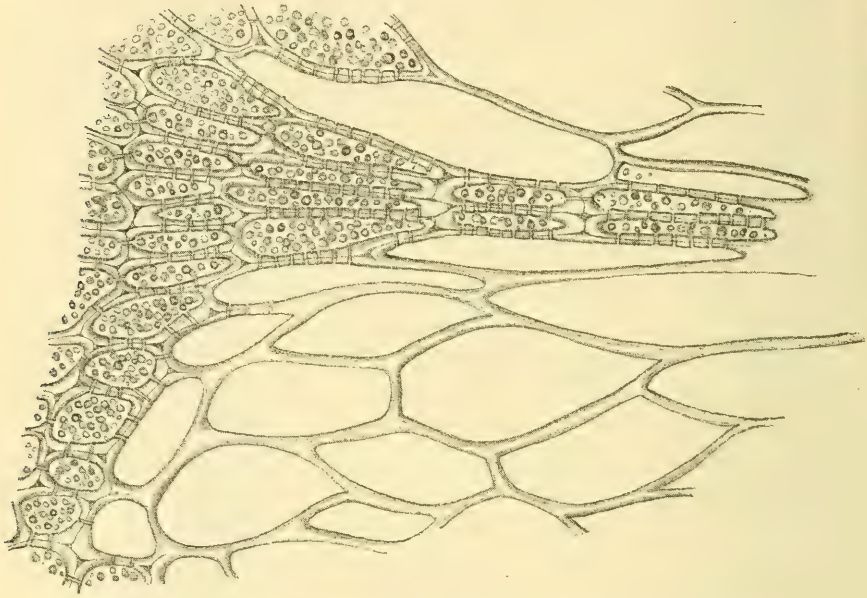


Fig. 26.

Liriodendron tulipifera L. Längsschnitt des Randes des Diaphragma. 200fach vergrössert.

Es ist jedoch die Frage, für welche Bekämpfung von Widerständen sich das nodale Diaphragma einrichtet?

Bevor ich auf diese Frage antworte, werfen wir einen Blick auf jene Pflanzen, welche ich als mit Diaphragmen versehene angeführt habe. Die 49 Arten gehören zu 13 Gattungen, deren Mehrzahl abwechselnd gegenständige Blätter besitzen. Eine Ausnahme machen hiervon Coronilla, Ficus, Vitis, Broussonetia. An

* D'Arbaumont l. c. p. 206.

dem Ende der Triebe bei Broussonetia treffen wir sehr oft eine zweireihige, gegenständige, ja sogar auch eine beinahe quirlständige Blattstellung, so dass wir bei dieser Gattung füglich die spirale Blattstellung unberücksichtigt lassen können. Vitis hat eine zweireihig wechselständige Blattstellung, an den Knoten jedoch steht den Blättern gegenüber der Blütenstand oder die Ranke, welche nur auf jedem dritten Knoten fehlt. Einigermaassen nähert sich

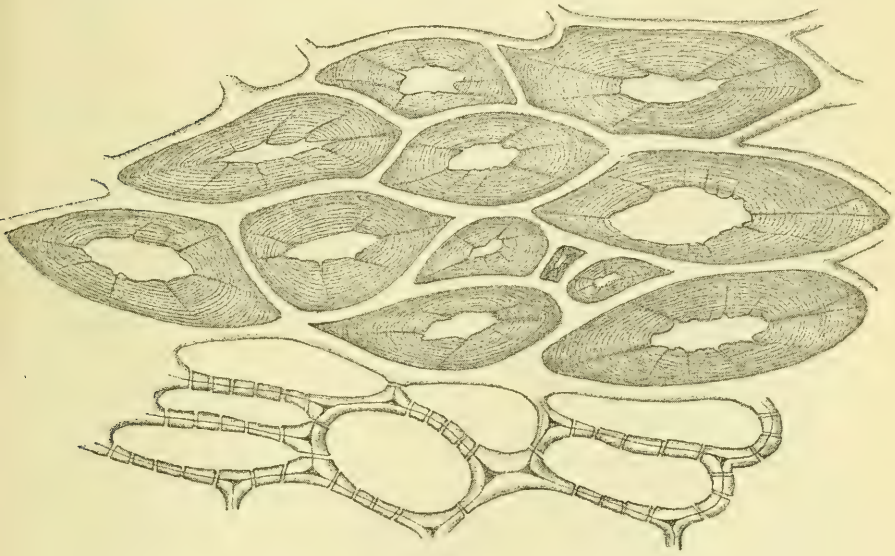


Fig. 27.

Liriodendron tulipifera L. Zellen des mittleren Theiles des Diaphragma. 450fach vergrössert.

daher auch diese hinsichtlich der Belastung des Triebes der abwechselnd gegenständigen (decussierten) Blattstellung.

Ficus Carica hat eine rein wechselständige Blattstellung, das Stengelglied der jungen Sprosse ist hier jedoch ziemlich kurz, und abgesehen von seinen gut entwickelten Blättern treibt er noch an den der Spitze des Triebes nahe gelegenen Knoten seinen ziemlich schweren birnförmigen Feigen-Blüthenstand.

Coronilla emeroides Boiss. et Spren. besitzt eine wechselständige Blattstellung und der Spross ist hier höchstens mit mehreren in den Achseln der Blätter entstehenden Blüthenknospen

belastet. Diese zwei letzten können wir aus dem Gesichtspunkte der Belastung als Ausnahme betrachten, ja mit einiger Nachgibigkeit nur Coronilla allein, bei der sich jedoch das Diaphragma, wie ich es nachgewiesen habe, nur manchmal vollständig entwickelt (Fig. 6—7), was vielleicht die Ruthenform der Triebe erfordert.

Ausser der abwechselnd-gegenständigen Blattstellung ist ein anderer Charakterzug bei den diaphragmahaltigen dicotylen Holzgewächsen, nämlich dass sich unter den Arten mehrerer Gattungen auch Schling- und Kletterarten vorfinden. Solche Gattungen sind: Clematis, Ficus, Lonicera, Vitis. Kletterarten besitzen nicht: Abelia, Broussonetia, Coronilla, Deutzia, Forsythia, Leycesteria, Paulownia, Philadelphus und Symphoricarpus. Unter diesen stehen Leycesteria und Symphoricarpus in philogenetischer Beziehung nahe zu den Loniceren. Die Gattungen Paulownia und Philadelphus aber zeigen keine bestimmte Beständigkeit in Hinsicht der Bildung des Diaphragma. Von Abelia, Broussonetia, Deutzia, Forsythia habe ich schon erwähnt, dass sie abwechselnd-gegenständige Blätter besitzen und nur Coronilla allein ist diejenige Gattung, welche weder verwandte Kletterarten, noch gegenständige Blätter besitzt.

Es liegt mir ferne, auf die biologische Eigenthümlichkeit in der philogenetischen Entwickelung der Pflanzen ein entscheidendes Gewicht zu legen. Ich wollte vorzüglich nur hinweisen auf die Kletterpflanzen als solche, deren zum Klettern angepasster Holzkörper durch Markstrahlen so ziemlich zerklüftet, rissig und daher zum Aushalten eines grösseren Druckes weniger tauglich ist.* Während jedoch die Kletterpflanzen auf die Zugfestigkeit in Anspruch genommen sind, werden Triebe, welche abwechselnd-gegenständige Blätter tragen, auf grossen Seitendruck und auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen. Dieser Seitendruck wird noch vergrössert durch die Last der in der Achsel der Blätter sich entwickelnden, oft in einer Reihe placierten Knospen, resp. Sprossen. Weil aber das zerstückelte Xylem den Druck nicht aushalten würde und in seinen Theilen leicht verschoben werden

* Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba L. Verh. d. zool.-bot. Ges. Bd. XLVII. 1887. p. 794. Die Construction des Holzes ist er geneigt als regressive Erscheinung zu erklären.

könnte, da es zum Aushalten des Druckes noch weniger geeignet ist, ist eine solche Einrichtung nothwendig, welche die Theile des Xylem zusammenhält und die Veränderung des Querschnittes verhindert.* So eine Einrichtung wäre z. B., wenn sich das Mark in seiner ganzen Ausdehnung zu einer solchen grösseren mechanischen Arbeit hierdurch einrichten würde, dass sich die Wand seiner Zellen verholzen würde und thatsächlich charakterisiert das Verholzen der Markzellen insbesondere die rankenden und Kletterpflanzen (Bignonia, Hoya).**

Die aufgezählten diaphragmahaltigen Pflanzen sind aber entweder röhrig, oder mit abgestorbenem Marke erfüllt und so sind ihre Markzellen zu eine derartigen mechanischen Aufgabe unvermögend. Diese zu ersetzen sind berufen die Diaphragmen, welche sich dieser mechanischen Arbeit durch die Form ihrer Zellen im Zusammenhange mit ihrer Anordnung angepasst haben.

Aehnliche Diaphragmen als Aussteifungseinrichtungen finden wir an zahlreichen monocotylen Wasserpflanzen, nur dass sie hier in erster Reihe nicht zur Hebung der Säulenfestigkeit, sondern zur Ausgleichung des radialen Druckes berufen sind.

Wenn wir bei den meisten der aufgezählten Arten die Zerstückelung des Xylems*** und dem gegenüber die abwechselnd-gegenständigen Blätter, ferner den in ihren Achseln stehenden Blüthenstand, resp. Früchte, endlich aber die an den Knoten vieler Arten zu mehreren sich entwickelnden Sprossen in Betracht ziehen, können wir leicht einsehen, dass zur Zustandebringung einer grössern Festigkeit im Xylem diese Diaphragmen vorzüglich geeignet sind, denn sie befähigen das Xylem nicht nur zum Ertragen einer grössern Last, sondern verhindern zugleich, dass die an einer Seite befindliche grössere Last im Xylem, ferner im Phloëm die Lage der zu einander gehörigen Theile, welche aus mechanischem Gesichtspunkte wichtig ist, sich verändere.†

---

* Schwendener l. c. p. 89.

** O. Warburg: Ueber Bau u. Entwickelung d. Holzes v. Caulotretus heterophyllus. Bot. Zeit. 41. Jahrg. 1883. p. 622.

*** Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba L. Verh. d. zool.-bot. Ges. Bd. XLVII. 1887. p. 794.

† Schwendener l. c. p. 84.

Ganz aus demselben Gesichtspunkte ist zu erklären, dass sich diese Diaphragmen als Aussteifungseinrichtung mit breiter Grundfläche an die röhrige Säule, also an die Xylemtheile anschliessen und zwar vorzüglich dort mit einer breiteren Sohle, wo sie eine durch grössere Last ausgeübte auseinander ziehende Kraft zu überwinden haben. Deshalb finden wir an den mehrblättrigen Knoten von Broussonetia das entwickelte Diaphragma (Fig. 5), Lonicera (Fig. 10), Forsythia (Fig. 9) ein an beiden Grundflächen gleichconcaves Diaphragma. Deshalb ist das Diaphragma bei Ficus (Fig. 3), Coronilla (Fig. 7) dicker an der Seite der Blätter, respective des Seitentriebes. Aber aus derselben Ursache hat sich das Diaphragma bei Vitis stärker entwickelt an den rankigen Knoten, als an den rankenlosen Knoten. Beachtenswerth ist noch in dieser Sache, dass sich das Diaphragma in den Knoten so placiert, dass es ein wenig über der Blattinsertion steht als Unterlage für den aus der Knospe sich entwickelnden grössern Sprosse (Fig. 3. 6).

Auf die Rolle der Diaphragmen als befestigende Aussteifungseinrichtung zeigt auch jener Umstand, dass die am stärksten entwickelten Diaphragmen in dem Mitteltheile der Triebe zu finden sind (Vitis, Ficus), dagegen in dem untersten Theile und in der Spitze die weniger entwickelten. Bekanntlich finden wir in dem mittleren Theile der Triebe die längsten Stengelglieder und so benöthigt hauptsächlich hier der Trieb die Befestigung, hingegen sind die Stengelglieder an dem untern Theile des Triebes kürzer und so auch ohne Aussteifungseinrichtung fester. Die an der Spitze des Triebes befindlichen Stengelglieder aber verkürzen sich nicht nur immer mehr, sondern es wird auch unter einem die Last geringer, die sie zu tragen haben.

Und dass die Diaphragmen wirklich die Festigkeit der Triebe, resp. ihre Fähigkeit zum Tragen von Lasten haben, kann ich auch mit Beispielen beweisen. Der junge Trieb von Ficus Carica steht steif und hält auch noch seine Spitze steif, denn sein Diaphragma bildet sich zeitig und verholzt sich zeitig. Dagegen krümmt sich an dem langen Triebe der Weinrebe die Spitze, das sog. Segel hakenartig. Wiesner eignet diese Krümmung dem positiven Heliotropismus und dem negativen Geotropismus der unteren

Stengelglieder des Triebes zu, in Verbindung mit dessen Schwäche, welche unfähig ist, das ziemlich schwere Segel zu tragen.*

Ursache davon ist aber auch noch die späte Entwickelung der Diaphragmen. Wie ich nämlich oben nachgewiesen habe, bildet sich in den Trieben von Vitis das Diaphragma an dem 4—5ten unter der Vegetationsspitze gelegenen Knoten in solcher Art, dass es zur grössern Festigkeit dienen könne und thatsächlich sind die obersten 2—3 Knoten diejenigen, welche nach abwärts gebogen sind. Dies ist jedoch nur an den langen Frühlings- und Sommer-Trieben so, denn im Herbst biegt sich die Spitze nicht so sehr herab, ja sie steht sogar ganz gerade — deshalb, weil im Herbst, da die Pflanze schon für die Aufspeicherung des Reserve-Nährstoffes entsprechend gesorgt hat, der vorbereitete Nahrungsstoff direkt zum Ausbau der jüngsten Diaphragmen verbraucht werden kann, und indem dies geschieht, erlangen auch die höchsten Knoten des Triebes die nöthige Festigkeit zum Geradhalten des Segels. Weniger oder überhaupt gar nicht herabgebogen ist die Spitze der kurzen, resp. der Achselsprosse, denn hier sind die Stengelglieder um vieles kürzer, als an den langen Trieben und die Diaphragmen bilden sich auch früher aus.

Bei den meisten Clematis-Arten entwickelt sich an den meisten das Diaphragma ziemlich zeitig und gut — deshalb steht das Ende ihrer Triebe gerade und steif, hingegen entwickelt sich das Diaphragma bei Clematis Vitalba spät und auch dann nicht genug fest, weshalb auch die Spitze des Triebes nicht steif, sondern mehr oder weniger schief steht, wie an den Kletterpflanzen. Aehnlich zu diesem ist das Verhalten bei Lonicera Caprifolium.

Für die mechanische Bedeutung des Diaphragma zeugt auch noch dieser Umstand, dass es sich an den langen Trieben stärker entwickelt als an den kurzen; was wir auch für ganz natürlich halten müssen, denn an den kurzen Trieben fallen ja wegen Kürze der Stengelglieder die Diaphragmen um vieles näher zu einander. Dass die kurzen Triebe eine solche mechanische Einrichtung

* Dr. J. Wiesner: Die heliotropischen Erscheinungen im Pflanzenreiche. II. Theil. Denkschriften d. kaiserl. Akad. der Wiss. Math.-Natur-wiss. Classe. Bd. 43. Wien 1882. p. 28.

auch entbehren können, ist daraus zu ersehen, dass sie in den Knoten der kurzen Triebe mancher sonst mit nodalem Diaphragma versehenen Pflanzen auch fehlt, z. B. bei der Lonicera alpina L.

In welcher Beziehung die Entwickelung und Bildung der Diaphragma zur Bildung und Anordnung der Elemente des Xylem und des Phloëm stehen, lasse ich jetzt ausser Acht, weil der Beweis, ob die Bildung und Entwickelung des Diaphragma mit der regressiven* oder mit der progressiven Entwickelung der Gewebe des Pflanzenstengels in Verbindung steht zur Zeit wegen Mangelhaftigkeit der Angaben noch nicht geliefert werden kann; aus eben denselben Gründen habe ich auch ausser Acht gelassen die nur mit dem Mikroskope bemerkbaren nodalen Diaphragmaspuren, wie auch die internodalen Diaphragmaspuren.

Alles Vorhergehende überblickend und zusammenfassend, können wir das Mark-Diaphragma der dicotylen Holzgewächse als eine solche Einrichtung bezeichnen, welche sich in erster Reihe aus dem Gesichtspunkte der Ernährung, in zweiter Reihe aber aus dem Gesichtspunkte der Festigkeit entwickelt. Und zwar in dieser Art, dass im jungen Alter des Triebes, also in den ersten 1—2 Jahren der Vegetation hauptsächlich seine mechanische Rolle Wichtigkeit erlangt, später nimmt diese mit dem Alter des Triebes ab und es wird immer wichtiger seine Speicher-Rolle, bis es dann in älteren Trieben nur allein in letzterer Hinsicht Wichtigkeit behält. Mit dieser doppelten Rolle steht auch im Zusammenhange die Gestaltung und Lebensdauer des Diaphragma. Auf die Eigenthümlichkeit seiner Gestalt habe ich schon mehrmals hingewiesen, nur noch bezüglich der Lebensdauer des Diaphragma muss ich bemerken, dass seine mittleren Zellen in solchen Fällen, wo das Diaphragma als mechanisches Mittel nicht mehr nöthig ist und als Speicher-Gewebe auch weniger in Anspruch genommen ist, in den älteren Trieben stellenweise absterben (Forsythia, Paulownia).

Diese doppelte physiologische Rolle bestimmt dann auch den

---

* Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba. Verh. der zool.-bot. Ges. Bd. XXXVII, 1887. p. 794.

Ort für das Diaphragma. Als Organ für Speicherung und als mechanisches Organ gehört ihm mehr der Platz in dem Knoten, dagegen, wenn es nur mechanische Verrichtung hat, dann entspricht seine Placierung diesem Zwecke auch in der Länge der Stengelinternodien (Liriodendron).

Dass ein und dasselbe Gewebe zur Verrichtung von zweierlei physiologischen Aufgaben berufen ist, kann nicht im Geringsten überraschen, denn die bisherigen anatomisch-physiologischen Forschungen haben ja auf mehrere solche Gewebe hingewiesen, welche nicht eine, sondern zwei, ja mehr Arbeiten zu verrichten berufen sind.

3. Das Markdiaphragma als Schutzeinrichtung.

Das Diaphragma hat ausser den an ihm bis jetzt gewürdigten Erscheinungen auch noch in jener Hinsicht eine Bedeutung, dass es als Hinderniss gegen das Eindringen fremder Stoffe in das Mark, in jenem Falle dient, wenn es durch zufälligen Bruch oder zufolge des Zugrundegehens späterer Sprosstheile äusseren Einflüssen ausgesetzt ist.

Goebel hat nachgewiesen, dass das Diaphragma monocotyler Pflanzen für die Gase permeabel ist, aber dem Eindringen des Wassers widersteht. Dasselbe gilt auch von diesen Diaphragmen. Durch das Diaphragma von Vitis nämlich konnte es mir nicht gelingen, selbst mit zwei Atmosphärendruck Wasser durchzupressen, obgleich ich diesen Versuch wiederholt und durch längere Zeit fortgesetzt habe. Diese Bedeutung der Diaphragmen kommt vorzüglich in jenen Pflanzen zur Geltung, bei welchen dem unbegrenzten Wachsthum ihrer Triebe nur die ungünstige Witterung Schranken setzt. Bei diesen entwickelt sich nicht das interrameale Mark und nach dem Aussterben ihrer nicht ausgebildeten Triebe beschützen nur die nodalen Diaphragmen das Mark, indem sie das interrameale Diaphragma ersetzen (Vitis). Hierdurch ist auch das Eindringen des Wassers zwischen die bereits abgestorbenen Markzellen gehindert, und das mit Luft erfüllte Markzellen-Gerippe ist vor Fäulniss bewahrt.

Diese schützende Rolle wäre die dritte Bedeutung des Diaphragma.

4. Das Markdiaphragma als systematisches Merkmal.

Eine weitere wohl nicht auf das Leben der Pflanzen Bezug habende Bedeutung des Diaphragma ist diejenige, von welcher die Pflanzen-Systematik ihren Nutzen hat. Weil es in dem Stengel der aufgezählten 49 Arten, respective 13 Gattungen vorkommt, gehört es ohne Zweifel zu deren diagnostischen Merkmalen. Wenn wir mit grösserer Aufmerksamkeit und Genauigkeit das Diaphragma untersuchen, finden wir, dass sich das Diaphragma in seiner Gestalt und Dimension nach Gattungen, aber auch nach Arten verändert. Und so kann es nicht nur als generisches, sondern auch als specifisches Merkmal angewendet werden, wovon übrigens die beiliegenden Figuren Nr. 1—13 den nöthigen Beweis geben. Nach meinen bisherigen Untersuchungen ist das Diaphragma als generisches Merkmal beständiger und sicherer, denn als specifisches Merkmal. Einfach deshalb, weil bei den specifischen Merkmalen die Dimensionen von Wichtigkeit sind, diese sich aber — so scheint es — in Folge von Kreuzungen sehr schnell, ja sogar zufällig auch unter dem Einfluss der Cultur ebenso verändern, wie die äussern Merkmale. Zuerst hat MILLARDET* versucht das Diaphragma als Unterscheidungs-Merkmal zu benützen, nach ihm haben es auch DIPPEL** und KOEHNE*** benützt für die Arten der Gattung Vitis, die andern Gattungen betreffend haben bis jetzt systematische Werke ersten Ranges das Diaphragma ausser Acht gelassen, obwohl auch dieses im Verhältnisse zu den übrigen, insbesondern zu den äusseren Organen der Pflanzen eines der beständigsten und bestimmtesten Merkmale ist.

Aus dieser Ursache ist es wünschenswerth, dass dem Diaphragma der dicotylen Holzgewächse eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet werde, als es bis jetzt geschah.

---

* La vigne americaine. Paris 1878. p. 222. — Études sur les vignes d'origine americaine 1876.

** Handbuch der Laubholzkunde. Bd. 2. Berlin 1892. p. 544.

*** Deutsche Dendrologie. Stuttgart 1893. p. 401.

12.

GRUPPEN INDUCIERTER SUBSTITUTIONEN.

Von GUSTAV RADOS,
c. M. der ung. Akademie und Professor am Polytechnikum Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 14. November 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, pp. 44—65, 1899

Die vorliegende Arbeit handelt von den Beziehungen, welche zwischen dem zur Herstellung der inducierten Substitutionen dienenden Algorithmus (wir werden denselben im Nachfolgenden der Kürze wegen schlechthin Induction nennen) und denjenigen elementaren Operationen bestehen, vermittelst deren man lineare Substitutionen zu verknüpfen pflegt. Von den letzteren muss insbesondere die Zusammensetzung oder Multiplication der linearen Substitutionen hervorgehoben werden. Betreffs dieser stellt sich nun die Frage ein, wie man die Inducierte der zusammengesetzten Substitution aus den inducierten Substitutionen der Componenten herstellen könne? Ob nicht etwa die inducierte Substitution des Productes zweier linearer Substitutionen mit dem Producte der inducierten Substitutionen der Factoren gleich ist? In der That zeigt die eingehende Erörterung, dass diese Frage — unabhängig von der speciellen Wahl der arithmetischen Ausrüstung der bei der Induction verwendeten algebraischen Form — unbedingt zu bejahen ist, falls man bei der Ausführung der Multiplication der inducierten Substitutionen die gehörige Reihenfolge beobachtet.

Auf diese Weise gelangt man zu der Begriffsbildung der inducierten Gruppe, die zur Inductorgruppe in isomorpher Beziehung steht und hiermit auf ein Uebertragungsprincip leitet.

Vermittelst dieses Principes gelingt nämlich die Uebertragung aller Resultate, die bezüglich der linearen Gruppen einer Mannigfaltigkeit von niederer Dimension gefunden wurden, auf die linearen Gruppen gewisser Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension, ohne dass hierbei neue Betrachtungen angestellt werden müssten, lediglich auf elementarem, gewissermassen mechanisch-rechnerischem Wege.

In der Theorie der linearen Substitutionen kommt ferner die Transposition derselben in Betracht, vermittelst welcher man die conjugierte Substitution einer gegebenen Substitution bildet. Es fragt sich nun, ob auch die Transposition und die Induction vertauschbare Operationen sind? Oder, was dasselbe ist, ob die inducierten Substitutionen conjugierter Substitutionen abermals conjugiert sind? Es zeigt sich nun, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, und nur in dem Falle statt hat, dass wir die arithmetische Ausrüstung der zur Induction verwendeten algebraischen Form in einer gewissen speciellen Weise wählen. Nimmt man nämlich die Zahlencoefficienten entsprechend der von SYLVESTER herrührenden präparierten Form an, so kann bei der Induction nicht nur — wie das schon SYLVESTER* gezeigt hat — die Eigenschaft der Contragredienz, sondern auch die Beziehung conjugierter Formen aufrecht erhalten werden.

Die aus der präparierten Form abgeleiteten inducierten Substitutionen, welche wir der Kürze halber als präparierte inducierte Substitutionen bezeichnen werden, führen endlich zur Erörterung der Frage, ob inducierte Gruppen einer orthogonalen Gruppe abermals orthogonal sind? Beschränkt man sich auf präparierte inducierte Substitutionen, so ist auch diese Frage unbedingt zu bejahen, allein bezüglich nicht präparierter Substitutionen unbedingt zu verneinen.

Den inducierten Substitutionen kommt auch in der Theorie derjenigen allgemeinen Gruppen eine wichtige Rolle zu, die aus automorphen Substitutionen einer quadratischen Form bestehen. Auf die eingehende Ausführung dieser Beziehungen hoffe ich in einer anderen Abhandlung zurückkehren zu können.

---

* SYLVESTER, „Sur les actions mutuelles des formes invariantives". Crelle, Journal, Bd. 83, p. 93.

I. Inducierte Substitutionen zusammengesetzter Substitutionen.

1. Es sei wieder* die algebraische Form n-ten Grades der Unbestimmten

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,$$

in nachfolgender Form angesetzt:

$$f(x) \equiv \mu_0 u_0 p_0 + \mu_1 p_1 u_1 + \cdots \mu_{r-1} u_{r-1} p_{r-1}$$
$$\left(r = \binom{n+k-1}{n}\right)$$

in welcher die Reihe der Zahlencoefficienten

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{r-1},$$

d. i. die arithmetische Ausrüstung derselben, der algebraischen Form, noch vorläufig ganz beliebig gewählt werde, die literalen Coëfficienten

$$u_0, u_1,\ \cdots,\ u_{r-1}$$

wieder als Unbestimmte gelten und schliesslich

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_{r-1}$$

die Reihe derjenigen verschiedenen Potenzproducte

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

bedeutet, für die

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

ist.

Diese Form sei als die Form n-ten Grades der Unbestimmten x kurz durch $f(x)$ bezeichnet; dieselbe Form kann aber auch als lineare Form der u aufgefasst werden, und in dieser Auffassung möge sie durch $f(u)$ bezeichnet werden. Unterzieht man nun die Form f der linearen Substitution

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{ik} y_k \quad \ldots \quad (S)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

so möge diese in die transformierte Form

$$F(y) \equiv \mu_0 U_0 P_0 + \mu_1 U_1 P_1 + \cdots + \mu_{r-1} U_{r-1} P_{r-1} \quad . \quad (1)$$

übergehen. Deren literale Coefficienten können — wie bekannt — folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$U_j = s_{j0} u_0 + s_{j1} u_1 + \cdots + s_{jr-1} u_{r-1}, \quad \ldots \quad I_n(S)$$
$$\left(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ r = \binom{n+k-1}{n}\right)$$

* Siehe Math. u. Naturwiss. Berichte, Bd. XVI, p. 241.

wo die Coëfficienten $s_{\alpha\beta}$ die homogenen inducierten Ausdrücke n-ten Grades der Coëfficienten a_{ij} sind.

Das System dieser linearen Gleichungen ist es, das die inducierte Substitution n-ten Grades von S, d. h. $I_n(S)$, liefert.

Die Gleichung unter (1) können wir, von unserer abgekürzten Bezeichnung Gebrauch machend, auch so schreiben:

$$f(S(x)) = f\{(I_n(S))^{-1}\},$$

wo $I_n((S))^{-1}$ die Inversion der inducierten Substitution $I_n(S)$ bedeutet.

Sei nunmehr

$$x_i = \beta_{i1}y_1 + \beta_{i2}y_2 + \cdots + \beta_{ik}y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (T)$$

eine beliebige andere lineare Substitution k-ter Dimension, so können wir dem entsprechend schreiben

$$f(T(x)) = f\{(I_n(T))^{-1}(u)\}.$$

Wenn wir nun auf die Form f die durch die Zusammensetzung der Substitutionen S und T gebildete Substitution ST ausüben, so ist zuvörderst wieder

$$f(ST(x)) = f\{(I_n(ST))^{-1}(u)\},$$

da aber andererseits

$$f(ST(x)) = f\{(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}(u)\}$$

ist, darum wird

$$I_n(ST)f(u) = f\{(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}(u)\}. \qquad (2)$$

Ist $[I_n(ST)]^{-1}$, die inverse Substitution von $I_n(ST)$, ausführlich geschrieben:

$$u_i = \sigma_{i0}U_0 + \sigma_{i1}U_1 + \cdots + \sigma_{iv-1}\sigma_{v-1},$$

und $(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}$ ausführlich geschrieben

$$u_i = \tau_{i0}U_0 + \tau_{i1}U_1 + \cdots + \tau_{iv-1}U_{v-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, v-1)$$

so folgt aus der Gleichung (2) das Bestehen der Gleichungen

$$\mu_0\sigma_{0j}p_0 + \mu_1\sigma_{1j}p_1 + \cdots + \mu_{v-1j}p_{v-1} =$$
$$= \mu_0\tau_{0j}p_0 + \mu_1\tau_{1j}p_1 + \cdots + \mu_{v-1j}p_{v-1};$$
$$(j = 0, 1, \ldots, v-1)$$

da aber die Potenzenproducte

$$p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}$$

linear unabhängig sind, ist diese Gleichung nur so möglich, dass

$$\sigma_{0j} = \tau_{0j},\ \sigma_{1j} = \tau_{1j}, \ldots, \sigma_{r-1\,j} = \tau_{r-1\,j}$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$$

ist; dann ist aber

$$\{I_n(ST)\}^{-1} = (I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1} = (I_n(T)\,I_n(S))^{-1}$$

und, da die Inversionen gleicher Substitutionen wiederum gleich sind, ist

$$I_n(ST) = I_n(T) \cdot I_n(S).$$

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

*„Die inducierte Substitution eines Productes ist mit dem Producte gleich, das aus den inducierten Substitutionen der Factoren in umgekehrter Reihenfolge gebildet wird.“**

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese Verhältnisse an einem speciellen Fall auch durch Berechnung zu erläutern.

Seien die beiden Substitutionen S und T ausführlich geschrieben

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

alsdann ist

$$ST = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 \\ B_1 &= a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ A_2 &= a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ B_2 &= a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{aligned}$$

ist.

---

* Wird die inverse Substitution von $I_n(S)$ durch $i(S)$ bezeichnet, so ergeben sich Substitutionen, deren Multiplicationsgesetz noch einfacher ist, nämlich:

$$i(ST) = [I_n(ST)]^{-1} = [I_n(T)\,I_n(S)]^{-1} = [I_n\ S)]^{-1}\,[I_n(T)]^{-1},$$

so dass

$$i(ST) = i(S)\,i(T)$$

ist.

Die inducierten Substitutionen zweiten Grades von S und T sind die folgenden:

$$I_2(S) = \begin{pmatrix} a_1^2 & 2a_1a_2 & a_2^2 \\ a_1b_1 & a_1b_2 + a_2b_1 & a_2b_2 \\ b_1^2 & 2b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$I_2(T) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{pmatrix}.$$

Dann wird die ausführliche Form des Productes $I_2(T)\,I_2(S)$ diese sein:

$$I_2(T)\,I_2(S) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

wo

$$c_{11} = a_1^2\alpha_1^2 + 2a_1b_1\alpha_1\alpha_2 + b_1^2\alpha_2^2 = (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)^2 = A_1^2$$

$$c_{12} = 2[a_1a_2\alpha_1^2 + a_1b_2\alpha_1\alpha_2 + a_2b_1\alpha_1\alpha_2 + b_1b_2\alpha_2^2] =$$
$$= 2(a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_2\alpha_1 + b_2\alpha_1) = 2A_1A_2$$

$$c_{13} = a_2^2\alpha_1^2 + 2a_2b_2\alpha_1\alpha_2 + b_2^2\alpha_2^2 = (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2)^2 = A_2^2$$

$$c_{21} = a_1^2\alpha_1\beta_1 + a_1b_1\alpha_1\beta_2 + a_1b_1\alpha_2\beta_1 + b_1^2\alpha_2\beta_2 =$$
$$= (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_1\beta_1 + b_1\beta_2) = A_1B_1$$

$$c_{22} = 2a_1a_2\alpha_1\beta_1 + a_1b_2\alpha_1\beta_2 + a_1b_2\alpha_2\beta_1 + a_2b_1\alpha_1\beta_2 + a_2b_1\alpha_2\beta_1 +$$
$$+ 2b_1b_2\alpha_1\beta_2 = (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) + (a_2\alpha_1 +$$
$$+ b_2\alpha_2)(a_1\beta_1 + b_1\beta_2) = A_1B_2 + A_2B_1$$

$$c_{23} = a_2^2\alpha_1\beta_1 + a_2b_2\alpha_1\beta_2 + a_2b_2\alpha_2\beta_1 + b_2^2\alpha_2\beta_2 =$$
$$= (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) = A_2B_2$$

$$c_{31} = a_1^2\beta_1^2 + 2a_1b_1\beta_1\beta_2 + b_1^2\beta_2^2 = (a_1\beta_1 + b_1\beta_2)^2 = B_1^2$$

$$c_{32} = 2[a_1a_2\beta_1^2 + a_1b_2\beta_1\beta_2 + a_2b_1\beta_1\beta_2 + b_1b_2\beta_2^2] =$$
$$= 2(a_1\beta_1 + b_1\beta_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) = 2B_1B_2$$

$$c_{33} = a_2^2\beta_1^2 + 2a_2b_2\beta_1\beta_2 + b_2^2\beta_2^2 = (a_2\beta_1 + b_2\beta_2)^2 = B_2^2$$

so dass

$$I_2(T)\,I_2(S) = \begin{pmatrix} A_1^2 & 2A_1A_2 & A_2^2 \\ A_1B_1 & A_1B_2 + A_2B_1 & A_2B_2 \\ B_1^2 & 2B_1B_2 & B_2^2 \end{pmatrix},$$

das ist aber in der That die inducierte Substitution der Substitution ST, so dass also

$$I_2(T)\,I_2(S) = I_2(ST)$$

ist.

2. Durch vollständige Induction überzeugt man sich, dass

$$I_n(S_1 S_2 \dots S_{m-1} S_m) = I_n(S_m)\,I_n(S_{m-1}) \dots I(S_2)\,I(S_1);$$

setzt man hierin

$$S_1 = S_2 = \cdots S_m = S,$$

so ergiebt sich:

$$I_n(S_m) = [I_n(S)]^m;$$

dies kann durch den nachstehenden Satz ausgedrückt werden:

Die inducierte Substitution der m-ten Potenz (m ist eine positive ganze Zahl*) einer linearen Substitution ist gleich der m-ten Potenz der inducierten Substitution.*

3. *Die inducierte Substitution der Einheits-Substitution.* Als Einheits-Substitution (identische Substitution) k-ter Dimension, E_k, sei die lineare Substitution

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \qquad \dots\dots\dots \quad (E_k)$$

Da

$$f(E_k(x)) = f(x) = f(u)$$

und andererseits

$$f(E_k(x)) = I_n(E_k)\,f(u),$$

so muss

$$I_n(E_k)\,f(u) = f(u)$$

sein, woraus man wieder vermöge der linearen Unabhängigkeit der Potenzproducte

$$p_0, p_1, \dots, p_{\nu-1}$$

schliesst, dass

$$I_n(E_n) = E_{\binom{n+k-1}{n}}$$

ist, d. h., dass jede inducierte Substitution der Einheits-Substitution wiederum eine Einheits-Substitution ist.

4. *Die inducierte Substitution der inversen Substitution.* Sei

$$ST = E_k,$$

so dass

$$T = S^{-1}$$

ist, dann folgt aus den Identitäten

$$I_n(ST) = I_n(E_k) = E_{\binom{n+k}{n}-1}$$

und

$$I_n(ST) = I_n(T)\, I_n(S),$$

dass

$$I_n(T)\, I_n(S) = E_{\binom{n+k}{n}-1},$$

und hieraus

$$I_n(S) = [I_n(S)]^{-1},$$

d. h.

$$I_n(S^{-1}) = [I_n(S)]^{-1};$$

hiernach *ist die Inducierte der inversen Substitution gleich der inversen Substitution der inducierten Substitution.*

Da ferner

$$I_n(S^{-m}) = I_n[(S^{-1})^m] = [I_n(S^{-1})] = \{[I_n(S)^{-1}]\}^m = [I_n(S)]^m$$

ist, *darum bleibt der auf die inducierte Substitution der Potenzsubstitution bezügliche Satz auch für den Fall gültig, dass der Exponent eine beliebige ganze Zahl ist.*

Nebenher bemerkt, folgt aus den Sätzen, die sich auf die Potenzen von Substitutionen und die Einheit-Substitution beziehen, sogleich, dass jede inducierte Substitution einer cyklischen Substitution wieder cyklisch ist. Ist nämlich

$$C^\alpha = E_k,$$

so ist auch

$$I_n(C^\alpha) = I(E_k),$$

d. h.

$$\{I_n(C)\}^\alpha = E_{\binom{n+k}{n}-1},$$

woraus der cyklische Charakter von $I_n(C)$ in Evidenz tritt.

5. *Inducierte Gruppen.*

Sei nunmehr

$$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_j, \ldots \quad \ldots \ldots \quad (G)$$

die aus beliebigen homogenen linearen Substitutionen k-ter Dimension bestehende Gruppe, dann kann zu jeder dieser Substitutionen je eine inducierte Substitution n-ten Grades gebildet werden, so dass sich die Reihe der Substitutionen von $\binom{n+k}{n}-1$-ter Dimension ergiebt:

$$I_n(S_1), I_n(S_2), \ldots, I_n(S_i), \ldots, S_n(S_j), \ldots \quad \{I_n(G)\}$$

Von dieser Reihe, $I_n(G)$, können wir jetzt leicht beweisen, dass sie wieder den Gruppencharakter hat. Sind nämlich $I_n(S_i)$ und $I_n(S_j)$ zwei beliebige Substitutionen der Reihe $I_n(G)$, dann ist ihr Product

$$I_n(S_i)\, I_n(S_j) = I_n(S_j S_i)$$

ebenfalls in der Reihe $I_n(G)$ enthalten, da ja mit S_j und S_i zugleich auch $S_j S_i$ in G vorkommt und $I_n(G)$ die sämmtlichen inducierten Substitutionen von G enthält.

Die Gruppe $I_n(G)$ möge als die *inducierte Gruppe* der *Inductor-Gruppe* G benannt werden. Die gefundene Thatsache lässt sich durch folgenden Satz ausdrücken:

Die inducierten Substitutionen der Elemente einer aus homogenen linearen Substitutionen bestehenden Gruppe bilden abermals eine Gruppe, die mit der ursprünglichen Gruppe isomorph ist.

6. *Ist G die allgemeinste lineare Gruppe, dann ist der zwischen G und $I_n(G)$ bestehende Isomorphismus meriedrisch, und zwar auf die Weise, dass während einer jeden Substitution von G in $I_n(G)$ eine und nur eine Substitution entspricht, jeder Substitution der Gruppe $I_n(G)$ in G n Substitutionen entsprechen.*

Ist nämlich

$$I_n(S) = A$$

und S' eine beliebige andere Substitution, für die gleichfalls

$$I_n(S') = A$$

ist, dann hat man

$$I_n(S')\,\{I_n(S)\}^{-1} = E_r;$$

da jedoch

$$\{I_n(S)\}^{-1} = I_n(S^{-1})$$

und

$$I_n(S')\, I_n(S^{-1}) = I_n(S^{-1}S')$$

ist, so muss

$$I_n(S^{-1}S') = E_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

sein. Dieses Resultat veranlasst uns dazu, dass wir uns mit der Gleichung

$$I_n(C) = E_r$$

eingehender befassen, in der wir die Substitution C als Unbekannte betrachten. Die Substitution C kann in der Form

$$x_i = c_i' y_1 + c_i'' y_2 + \cdots + c_i^{(k)} y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

geschrieben werden, so dass als die eigentlichen Unbekannten des Problems: die Coëfficienten

$$c_i^{(j)}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

erscheinen. Wird die Substitution C auf irgendeine Form n-ten Grades ausgeübt, so wird diese im Sinne der Relation

$$I_n(C) = E_\nu$$

diese Form in sich selbst transformieren. Benützen wir als algebraische Form n-ten Grades die n-te Potenz

$$f(x) = f(u) = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k)^n,$$

in welcher die Coëfficienten

$$u_1, u_2, \ldots, u_k$$

Unbestimmte seien. Wird hierauf die Substitution C angewendet, so muss die transformierte Form mit der ursprünglichen identisch sein, d. h. es muss die Relation

$$\{(u_1 c_1' + u_2 c_2' + \cdots + u_k c_k')x_1 + (u_1 c_1'' + u_2 c_2'' + \cdots + u_k c_k'')x_2 + \cdots + \\ + (u_1 c_1^{(k)} + u_2 c_2^{(k)} + \cdots + u_k c_k^{(k)})x_k\}^n \equiv (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k)^n$$

identisch bestehen. Dann muss aber zugleich

$$\begin{aligned} (u_1 c_1' + u_2 c_2' + \cdots + u_k c_k)^n &= u_1^n \\ (u_1 c_1'' + u_2 c_2'' + \cdots + u_k c_k'')^n &= u_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (u_1 c_1^{(k)} + u_2 c_2^{(k)} + \cdots + u_k c_k^{(k)})^n &= u_k^n \end{aligned}$$

sein, was bei der Unbestimmtheit der u nur so möglich ist, dass

$$\begin{aligned} c_1'^n &= 1, & c_2' &= 0, \ldots, c_k' &= 0 \\ c_1'' &= 0, & c_2'' &= 1, \ldots, c_k'' &= 0 \\ \cdots & & & \ldots, & \cdots \\ c_1^{(k)} &= 0, & c_2^{(k)} &= 0, \ldots, c_k^{(k)})^n &= 1 \end{aligned}$$

ist.

Hieraus ergiebt sich für das Coëfficientensystem das Resultat, dass ausser der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, die n-te Einheitswurzeln sind, alle übrigen Elemente gleich Null sind. C hat demnach diese Form:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_k \end{pmatrix},$$

wo

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$$

n-te Einheitswurzeln sind. Diese letzteren lassen aber auch noch eine nähere Bestimmung zu. Da nämlich C die Form f in sich selbst transformiert, muss die Relation

$$\sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_k!} \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_k^{i_k}\, u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_k^{i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} \equiv$$
$$\equiv \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_k!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_k^{i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

identisch bestehen, woraus wieder hervorgeht, dass

$$\varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_k^{i_k} = 1,$$

wofern

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$$

ist; dann ist aber

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^{n-1} = 1,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

oder wenn an beiden Seiten mit ε_β multipliciert wird,

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

ist, so dass sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$I_n(C) = E$$

in der Form

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \varepsilon^\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^\mu & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon^\mu \end{pmatrix}$$

erscheinen, worin ε eine primitive Einheitswurzel bedeutet. Wenn wir also Γ_1 kurzweg mit Γ bezeichnen, so liefert die Reihe der Substitutionen

$$E_k, \Gamma, \Gamma^2, \dots, \Gamma^{n-1}$$

die sämmtlichen Lösungen der Gleichung

$$I_n(C) = E_r.$$

Wenn also vermöge des Isomorphismus von $I_n(G)$ und (G) der Substitution A in $I_n(G)$ die Substitution S in der Gruppe G entspricht, so sind, wie aus der Gleichung unter (I) und aus den Betrachtungen über die Gleichung $I_n(C) = E_r$ ersichtlich ist, die sämmtlichen der Substitution A in der Gruppe G entsprechenden Substitutionen in der Reihe

$$S,\ \Gamma S,\ \Gamma^2 S,\ \ldots,\ \Gamma^{n-1} S$$

enthalten. Demzufolge ist der Isomorphismus, der zwischen dem Inductor G und den inducierten Gruppen $I_n(G)$ besteht, in der That solcher Art, dass er zwischen den Substitutionen dieser beiden Gruppen eine ein-$(n-1)$-deutige Beziehung herstellt.

7. Die im Vorhergehenden gefundenen Sätze führen zu einem wichtigen Uebertragungsprincip, dessen Ursprung in der einfachen Bemerkung zu finden ist, dass die Inducierte irgendeiner endlichen Gruppe wiederum endlich ist. So können z. B. das Analogon der bekannten endlichen Gruppen des binären Gebietes, die der cyklischen, der Diëder-, Tetraëder-, Oktaëder-, Ikosaëder-Gruppen bezüglich gewisser höherer Dimensionen ohne Benützung irgendwelcher neuen Betrachtungen lediglich durch Bildung inducierter Gruppen aufgestellt werden.

Wie es aber unmittelbar ersichtlich ist, giebt der Uebergang auf die inducierte Gruppe bezüglich irgendwelcher Classe von Gruppen ein Uebertragungsprincip von niederer Dimension auf eine von höherer Dimension, da die Dimensionenzahl der inducierten Substitution $\binom{n+k-1}{n}$ ist, wenn nur $n > 1$ ist, grösser als die Dimensionenzahl k der ursprünglichen Substitution.

II. Inducierte Substitutionen conjugierter Substitutionen.

Wählt man in der Form

$$f = \mu_0, u_0 p_0 + \mu_1 u_1 p_1 + \cdots + \mu_{r-1} u_{r-1} p_{r-1},$$

die bei der Induction eine vermittelnde Rolle inne hat, die Zahlencoëfficienten

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{r-1}$$

ganz willkürlich, so können die einfachsten Eigenschaften sowohl

der Formen, als auch der mit ihnen inducierten Substitutionen analytisch oft nur auf complicierte Weise ausgedrückt werden, oder sie verschwinden auch oft gänzlich. Wird z. B. die Form

$$f = u_0 x_1^3 + \binom{3}{1} u_1 x_1^2 x_2 + \binom{3}{2} u_2 x_1 x_2^2 + \binom{3}{3} x_3 x_2^3$$

zu Grunde gelegt, so ist die inducierte Substitution dritten Grades $I_3(S)$ der Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S)$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + 3\alpha_1^2\alpha_2 \quad u_1 + 3\alpha_1\alpha_2^2 \quad u_2 + \alpha_2^2 \quad u_3 \\
U_1 &= \alpha_1^2\beta_1 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_2 + \alpha_2^2\beta_2 u_3 \\
U_2 &= \alpha_1\beta_2^2 u_0 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \alpha_2\beta_2^2 u_3 \\
U_3 &= \beta_1^3 \quad u_0 + 3\beta_1^2\beta_2 \quad u_1 + 3\beta_1\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3,
\end{aligned}$$

während die inducierte Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ y_1 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S')$$

der conjugierten Substitution S, $I_3(S')$ ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + 3\alpha_1^2\beta_1 \quad u_1 + 3\alpha_1\beta_1^2 \quad u_2 + \beta_1^3 \quad u_3 \\
U_1 &= \alpha_1^2\alpha_2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_2 + \beta_1^2\beta_2 u_3 \\
U_2 &= \alpha_1\alpha_2^2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \beta_1\beta_2^2 u_3 \\
U_3 &= \alpha_2^3 \quad u_0 + 3\alpha_2^2\beta_2 \quad u_1 + 3\alpha_2\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3
\end{aligned}$$

ist. Wie also hieraus ersichtlich ist, sind die inducierten Substitutionen der conjugierten Inductoren S und S', nämlich $I_3(S)$ und $I_3(S')$ nicht conjugiert. Die Beziehung conjugierter Substitutionen bleibt demnach bei der Induction nicht aufrechterhalten. Die eingehendere Untersuchung überzeugt uns aber davon, dass diese sonderbare Erscheinung bloss die Folge der ungeeigneten arithmetischen Ausrüstung der zur Induction verwendeten algebraischen Form ist. Wird nämlich die algebraische Form so präpariert, wie dies bereits SYLVESTER gezeigt hat, dass man nämlich als Zahlencoëfficienten nicht die Polynomial-Coëfficienten

selbst, sondern deren Quadratwurzeln wählen, so können wir die Beziehung conjugierter Substitutionen der beiden Formen bei der Induction aufrecht erhalten.

Wird f in folgender Form:

$$f = u_0 x_1^3 + \sqrt{\binom{3}{1}}\, u_1 x_1^2 x_2 + \sqrt{\binom{3}{2}}\, u_2 x_1 x_2^2 + \sqrt{\binom{3}{3}}\, u_3 x_2^3,$$

gewählt; dann ist $I(S)$, die inducierte Substitution von S, ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_1^2\alpha_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_1\alpha_2^2 \quad u_2 + \alpha_2^3 \quad u_3\\
U_1 &= \sqrt{3}\alpha_1^2\beta_1\, u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2)\, u_1 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1)\, u_2 + \sqrt{3}\alpha_2^2\beta_2\, u_3\\
U_2 &= \sqrt{3}\alpha_1\beta_1^2\, u_0 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2)\, u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2)\, u_2 + \sqrt{3}\alpha_2\beta_2^2\, u_3\\
U_3 &= \beta_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\beta_1^2\beta_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\beta_1\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3
\end{aligned}$$

$I_3(S')$, die inducierte Substitution der Substitution S' aber wird ausführlich geschrieben diese sein:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_1^2\beta_1 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_1\beta_1^2 \quad u_2 + \beta_1^3 \quad u_3\\
U_1 &= \sqrt{3}\alpha_1^2\alpha_2\, u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2)\, u_1 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2)\, u_2 + \sqrt{3}\beta_1^2\beta_2\, u_3\\
U_2 &= \sqrt{3}\alpha_1\alpha_2^2\, u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1)\, u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2)\, u_2 + \sqrt{3}\beta_2\beta_2^2\, u_3\\
U_3 &= \alpha_2^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_2^2\beta_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_2\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3,
\end{aligned}$$

so dass es ersichtlich ist, dass die inducierten Substitutionen der conjugierten Substitutionen wieder conjugiert sind.

Die mittels präparierter Formen abgeleiteten Substitutionen werden wir kurzweg präparierte inducierte Substitutionen nennen.

Beschränkt man sich auf präparierte inducierte Substitutionen, so können wir den folgenden Satz aufstellen:

*Conjugierten Inductoren entsprechen als Inducierte wieder conjugierte Substitutionen.**

Diesen Satz hat in dieser Fassung zuerst Le Paige aufgestellt und erwiesen (Math. Annalen, Bd. 15, p. 206). Der Beweis

* Die Beziehung conjugierter Substitutionen kann nach der Induction nur dann aufrecht erhalten werden, wenn die bei der Induction verwendete algebraische Form von der Sylvester'schen präparierten Form sich nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Diesen Satz konnte ich nur nach längeren Rechnungen beweisen, da derselbe aber in dem Folgenden nicht vorkommt, so konnte ich von der Mittheilung desselben hier absehen.

LE PAIGE's führt aber nur durch langwierige Berechnungen zum Ziele. Im Folgenden möchte ich den Satz auf eine neue Weise beweisen, so dass die Richtigkeit desselben fast ohne rechnerischen Aufwand in Evidenz tritt.

1. Um spätere Unterbrechung zu vermeiden, möge folgender Hülfssatz vorangestellt werden:

Hülfssatz. Damit die linearen Substitutionen

$$U_i = r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{i\nu-1}u_{\nu-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1) \quad . \quad . \quad . \quad (R)$$

und

$$V_i = s_{i0}u_0 + s_{i1}u_1 + \cdots + s_{i\nu-1}u_{\nu-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1) \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

conjugiert seien, ist es nothwendig und hinreichend, dass

$$U_0v_0 + U_1v_1 + \cdots + U_{\nu-1}v_{\nu-1} = V_0u_0 + V_1u_1 + \cdots + V_{\nu-1}u_{\nu-1}. \quad (\mathrm{II})$$

sei. Sind nämlich R und S conjugierte Substitutionen, d. h.

$$r_{ij} = s_{ji}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

so sind die bilinearen Formen

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} r_{ij}u_jv_i$$

und

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} s_{ji}u_jv_i$$

identisch; da aber:

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=0}^{\nu-1}(r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{i\nu-1}u_{\nu-1})v_i = \sum_{i=0}^{\nu-1} U_iv_i$$

und

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=0}^{\nu-1}(s_{j0}v_0 + s_{j1}v_1 + \cdots + s_{j\nu-1}v_{\nu-1})u_j = \sum_{j=0}^{\nu-1} V_ju_j,$$

so muss

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} U_iv_i = \sum_{j=0}^{\nu-1} V_ju_j$$

identisch bestehen, also ist die Bedingung (II) als nothwendig erwiesen.

Es muss nur noch gezeigt werden, dass sie auch hinreichend ist. Setzen wir nämlich voraus, dass die Bedingung (II) erfüllt ist, so muss die Relation

$$\sum_{i=0}(r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{i\nu-1}u_{\nu-1})v_i =$$
$$= \sum_{j=0}(s_{j0}v_0 + s_{j1}v_1 + \cdots + s_{j\nu-1}v_{\nu-1})u_j$$

identisch bestehen, das bedeutet aber, dass die bilinearen Formen

$$\sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} r_{ij}u_jv_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} s_{ji}u_jv_i$$

identisch sind; somit muss

$$r_{ij} = s_{ji}$$

sein, d. h. die Substitutionen R und S müssen conjugiert sein.

2. *Beweis des Hauptsatzes.* Der Einfachheit halber beschränke ich mich wieder auf binäre Formen, es sei hierbei jedoch besonders hervorgehoben, dass sämmtliche Betrachtungen auch auf irgendwieviel Unbestimmte enthaltende Formen angewendet werden können.

Es seien

$$f = u_0x_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}u_1x_1^{n-1}x_2 + \sqrt{\binom{n}{2}}u_2x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + u_nx_2^n =$$
$$= (a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n$$

und

$$g = v_0x_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}v_1x_1^{n-1}x_2 + \sqrt{\binom{n}{2}}v_2x_2^{n-2}x_2^2 + \cdots + v_na_2^n =$$
$$= (b_1x_1 + b_2x_2)^n = b_x^n$$

zwei präparierte Formen; die eingeführten Symbole a_1, a_2, b_1, b_2 werden durch die Gleichungen:

$$u_i = \sqrt{\binom{n}{1}}a^{n-i}a_2^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$v_i = \sqrt{\binom{n}{1}}b_1^{n-1}b_2^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

definiert.

Wendet man auf f

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (S')$$

und auf g die conjugierte Substitution von S

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ x_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (S')$$

an, dann seien die transformierten Formen

$$\begin{aligned} f(S(x)) &= U_0 y_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}\, U_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + U_n y_2^n = \\ &= [(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\, y_1 + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)\, y_2]^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(S(x)) &= V_0 y_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}\, V_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + V_n y_2^n = \\ &= [(b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)\, y_1 + (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)]^n, \end{aligned}$$

so dass die transformierten Coëfficienten vermittelst der Symbole a und b folgendermaassen ausgedrückt werden können:

$$U_i = \sqrt{\binom{n}{1}}\, (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^{n-1}\, (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)^i \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$V_i = \sqrt{\binom{n}{1}}\, (b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)^{n-i} (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)^i \quad . \quad . \quad (\mathrm{IV})$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

Der Beweis unseres Hauptsatzes kann nun in einigen Worten geführt werden. Wir gehen von der Identität

$$\begin{aligned} &[(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\, b_1 + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)\, b_2]^n = \\ &= [(b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)\, a_1 + (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)\, a_2]^n \end{aligned}$$

aus. Indem wir dieselbe ausführlicher hinschreiben, kommen wir auf die folgende Identität:

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ \sqrt{\binom{n}{1}}\, (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^{n-i} (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)^i \cdot \sqrt{\binom{n}{1}}\, b_1^{n-i} b_2^i \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sqrt{\binom{n}{1}}\, (b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)^{n-i} (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)^i \cdot \sqrt{\binom{n}{1}}\, a_1^{n-i} a_2^i \right\},$$

die mit Rücksicht auf die Identitäten unter (3), (4), (III) und (IV) so geschrieben werden kann:

$$U_0 v_0 + U_1 v_1 + \cdots + U_n v_n = V_0 u_0 + V_1 u_1 + \cdots + V_n u_n;$$

diese Gleichheit zeigt aber schon im Sinne des vorausgeschickten Hilfssatzes, dass die Substitutionen $I_n(S)$ und $I_n(S')$ conjugiert sind, dass also in der That

$$I_n(S') = \{I_n(S)\}'$$

ist.

3. *Der Sylvester'sche Satz über contragrediente Substitutionen.**

Der Inhalt dieses Satzes besteht darin, dass bei Benützung präparierter Formen nach der Induction die Contragredienz erhalten bleibt. Der Beweis ist auf Grund des Vorhergegangenen sehr einfach. Sei die Substitution S ausführlich geschrieben

$$y_i = s_{i1}x_1 + s_{i2}x_2 + \cdots + s_{ik}x_k; \quad \underset{(i=1,\,2,\,\ldots,\,k)}{} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

sei ferner die Determinante der Substitution: $|S|$ und die Subdeterminante des Elementes s_{ij}, dann kann die mit S contragrediente Substitution T auf folgende Weise geschrieben werden

$$y_i = \frac{S_{i1}}{|S|}x_1 + \frac{S_{i2}}{|S|}x_2 + \cdots + \frac{S_{ik}}{|S|}x_k; \quad \underset{(i=1,\,2,\,\ldots,\,k)}{} \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

da aber

$$x_i = \frac{S_{1i}}{|S|}y_1 + \frac{S_{2i}}{|S|}y_2 + \cdots + \frac{S_{ki}}{|S|}y_k \quad \underset{(i=1,\,2,\,\ldots,\,k)}{}$$

die Umkehrung von S, d. i. S^{-1} und diese Substitution die conjugierte Substitution von T ist, darum kann die contragrediente Substitution von S, d. i. T durch die Gleichung

$$T = [S^{-1}]'$$

ausgedrückt werden.

Wenden wir nun auf beiden Seiten die Operation der präparierten Induction I_n an, so tritt durch die Identitäten

$$I_n(T) = I_n\{[S^{-1}]'\} = [I_n(S^{-1})]' = \{[I_n(S)]^{-1}\}'$$

in Evidenz, dass $I_n(T)$ und $I_n(S)$ contragredient sind, womit zugleich auch der Sylvester'sche Satz bewiesen ist.

III. Inducierte Gruppen orthogonaler Gruppen.

Die Bedeutung der inducierten Substitutionen in der Invariantentheorie liegt darin, dass man im Falle ihrer Anwendung

* S. Crelle, Journal, Bd. 85, p. 91—93; ferner Hurwitz: „Zur Invariantentheorie", Mathematische Annalen, Bd. XLV. p. 394.

bei der Untersuchung von Formen invarianten Charakters sich ausschliesslich auf lineare Grundformen beschränken kann. Die moderne Invariantentheorie beschränkt sich nicht mehr darauf, dass sie bloss die zur allgemeinsten linearen Gruppen gehörigen Formen invarianten Charakters zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht, sondern sie erstreckt sich vielmehr auch auf die Bestimmung von Invariantensystemen specieller Gruppen. Unter diesen speciellen Gruppen nimmt die orthogonale Gruppe, vermöge ihrer häufigen Anwendbarkeit in der Geometrie und Mechanik, einen besonderen Platz ein. Und nun fragt es sich, ob beim Aufbau der Invariantentheorie dieser orthogonalen Gruppen jene Vortheile erhalten bleiben, welche die Anwendung inducierter Substitutionen bietet? Sind die inducierten Gruppen der orthogonalen Gruppen wieder orthogonal, so wird die Antwort auf die gestellte Frage bejahend sein. Das wird in der That der Fall sein, so oft bei der Herleitung der inducierten Gruppen eine präparierte algebraische Form verwendet wird. Auf Grund des Vorhergegangenen können wir nämlich den folgenden Satz leicht beweisen:

1. *Die präparierten inducierten Substitutionen einer orthogonalen Substitution sind ebenfalls orthogonal.*

Sei

$$y_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{ik}y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (S)$$

orthogonal, d. h. zwischen ihren Coëfficienten sollen die Bedingungsgleichungen

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (1)$$

bestehen, in denen δ_{ij} Null oder Eins ist, je nachdem j von i verschieden oder damit übereinstimmend ist. S^{-1}, die Inversion der orthogonalen Substitution S kann — wie bekannt — so geschrieben werden:

$$x_i = c_{1i}y_1 + c_{2i}y_2 + \cdots + c_{ki}y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

und da dies zugleich die conjugierte Substitution von S ist, so genügt orthogonale Substitution der Gleichung

$$S^{-1} = S' \qquad (I)$$

Wie leicht ersichtlich, ist (I) nicht allein die nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Orthogonalität einer linearen Substitution. Wird nämlich der Bedingung (I) Genüge geleistet, so ist zugleich auch die Gleichung

$$S'S = E_k$$

befriedigt, d. h. die Composition der Coëfficientensysteme

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{k1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{k2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1k} & c_{2k} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

führt auf das Einheitssystem, also

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \dots + c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij},$$

dann ist aber S orthogonal.

Wenn wir nunmehr auf beide Seiten der Gleichung (I) die Operation I_n anwenden und berücksichtigen, dass I_n das Zeichen der präparierten inducierten Substitution ist, dann folgt aus den Identitäten

$$\begin{aligned} I_n(S^{-1}) &= I_n(S') \\ I_n(S^{-1}) &= [I_n(S)]^{-1} \\ I_n(S') &= [I_n(S)]', \end{aligned}$$

dass

$$[I_n(S)]^{-1} = [I_n(S)]'$$

ist, woraus aber schon auf Grund des in (I) ausgedrückten Satzes, $I_n(S)$ sich als orthogonale Substitution erweist.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, auch diesen Satz an einem Beispiel zu erläutern.

Sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

orthogonal, dann sind die zwischen den Coëfficienten bestehenden Bedingungsgleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Die präparierte inducierte Substitution zweiten Grades von S ist

$$I_2(S) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \sqrt{2}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \sqrt{2}\alpha_2\beta_2 \\ \beta_1^2 & \sqrt{2}\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

dann ist es, da

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = \alpha_1^4 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 = 1$$
$$c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 1$$
$$c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = \beta_1^4 + 2\beta_1^2\beta_2^2 + \beta_2^4 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 = 1$$
$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = \sqrt{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) = 0$$
$$c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = \alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_2^2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = 0$$
$$c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = \sqrt{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 0$$

ist, unmittelbar ersichtlich, dass $I_2(S)$ ebenfalls orthogonal ist.

Endlich bemerken wir noch, dass die Determinantengleichung

$$|I_n(S)| = |S|^{\binom{n+k-1}{k}}$$

die folgenden zwei Sätze liefert:

Die Inducierte einer geraden orthogonalen Substitution (deren Determinante + 1 ist) *ist wieder gerade.*

Die inducierte Substitution n-ten Grades einer ungeraden orthogonalen Substitution von k-ter Dimension (deren Determinante — 1 ist) *ist eine gerade oder ungerade orthogonale Substitution, je nachdem der Binomial-Coëfficient*

$$\binom{n+k-1}{k}$$

gerade oder ungerade ist.

13.

UEBER DIE FACTORENZERLEGUNG DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG DER INDUCIERTEN SUBSTITUTION.

Von GUSTAV RADOS,
corr. Mitgl. der ung. Akademie und Prof. am Polytechnikum Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 12. Dezember 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö“ (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger) Bd. XVII. p. 66—78.

Sind

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varphi_k(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

der linearen Substitution

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ik}y_k \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),$$

so können die Wurzeln der zur inducierten Substitution $n$ten Grades dieser Substitution, zu

$$U_j = r_{j0}u_0 + r_{j1}u_1 + \cdots + r_{j\nu-1}u_{\nu-1} \qquad \left[j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-1;\ \nu=\binom{n+k-1}{n}\right]$$

gehörigen charakteristischen Gleichung

$$\Phi_{kn}(y) \equiv \begin{vmatrix} r_{00}-y & r_{01} & \cdots & r_{0\nu-1} \\ r_{10} & r_{11}-y & \cdots & r_{1\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{\nu-10} & r_{\nu-11} & \cdots & r_{\nu-1\nu-1}-y \end{vmatrix} = 0$$

— wie bekannt* — aus dem Produkte

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}$$

hervorgehen, indem man darin an Stelle der Indexcombination

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

die sämmtlichen Combinationen mit Wiederholung der Elemente 1, 2, $\cdots$, k der Reihe nach setzt.

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auch auf die charakteristische Gleichung

$$\Phi_{kn}(y) = 0,$$

von der auf Grund des in den einleitenden Zeilen citierten Satzes bewiesen werden soll, dass bei jedem Werthe von n (insoferne es grösser als 1 ist) und unabhängig von k stets *reducibel* ist. Die Zahl der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ kann sogar immer auf analytischem Wege vermittelst einer Formel bestimmt werden, wie das der im Folgenden zu beweisende Satz zeigt:

Die Anzahl ϱ_{kn} der irreducibeln Factoren der charakteristischen Function $\Phi_{kn}(y)$ ergiebt sich stets durch die Formel:

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Omega_k^{(n)}(0),$$

wo an Stelle von $\Omega_k(x)$

$$\Omega_k(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots + \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)};$$

zu setzen ist; im Falle, dass $k \geq n$ ist, ist ϱ_{kn}, die Zahl der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$, von k unabhängig und ergiebt sich durch die Formel

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Psi^{(n)}(0),$$

wo $\Psi(x)$ die mit Hülfe des unendlichen Productes $\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha}$ definierte transcendente analytische Function bedeutet.

Nebenbei heben wir als vom Standpunkte der Algebra interessantes Nebenresultat hervor, dass die irreducibelen Factoren

* S. die Abhandlung des Autors unter dem Titel „Inducierte lineare Substitutionen" Bd. XVI. p. 241—262 dieser Berichte.

von $\Phi_{k\,n}(y)$ nichts anderes sind, als die Polynome derjenigen Resolventen der Gleichung $k$ten Grades

$$\varphi_k(\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln die aus den Wurzeln der Gleichung $\varphi_k(\lambda) = 0$ gebildeten Potenzproducte sind. Unter diesen Resolventen befindet sich die bezüglich der Lösung der Gleichung wichtigste, nämlich die GALOIS'sche, insofern n auf geeignete Weise gewählt wird. Hierzu genügt es, dass

$$n \geqq \frac{k(k+1)}{2}$$

sei. Hiermit ist zur Bildung des GALOIS'schen Resolventen ein neuer Weg erschlossen, auf dem man in principiell einfacherer Weise, als bisher zur Kenntniss dieses Resolventen gelangen kann, insoferne man auf diesem Wege selbst die übergangsweise Benützung von Irrationalen und aus diesen gebildeten symmetrischen Ausdrücken vermeiden kann und unter den auszuführenden Operationen blos die Factorenzerlegung der zur inducierten Substitution $\frac{k(k+1)}{2}$ten Grades gehörigen charakteristischen Function aus dem Gebiete rationaler Operationen heraustritt.

I.

1. Im Sinne des eingangs citierten Satzes kann jede Wurzel der Gleichung $\binom{n+k-1}{n}$-ten Grades

$$\Phi_{k\,n}(y) = 0$$

in der Form

$$y = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \cdots \lambda_q^{l_q}$$

geschrieben werden, wofern

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_q = n \qquad (q = 1, 2, 3, 4, \ldots, k)$$

ist. Unter den Exponenten $l_1, l_2, \ldots, l_q$ können auch gleiche vorkommen. Es sei

$$\begin{aligned}
l_1 &= \cdots = l_{\alpha_1} = m_1 \\
l_{\alpha_1+1} &= \cdots = l_{\alpha_1+\alpha_2} = m_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1} &= l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+2} = \cdots = l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r} = m_r,
\end{aligned}$$

so dass

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r = u$$

ist, dann kann y in der folgenden Form geschrieben werden:

$$y = (\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha_1})^{m_1}(\lambda_{\alpha_1+1}\lambda_{\alpha_1+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_2} \ldots$$
$$\ldots (\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1}\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r})^{m_r}.$$

Bestimmen wir nun diejenige Permutationsgruppe Γ der Elemente

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k,$$

deren Substitutionen y unverändert lassen. Es kann dies auf folgende Weise geschehen. Es seien

$$G_1 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha_1}] = (t'_1, t'_2, \ldots t'_{\alpha_1!})$$
$$G_2 = [\lambda_{\alpha+1},\ \lambda_{\alpha_1+2}, \ldots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2}] = (t''_1, t''_2, \ldots t''_{\alpha_2!})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_r = [\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+1+1}, \ldots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}] = (t_k^{(r)}, t_2^{(r)}, \ldots, t_{\alpha_r!}^{(r)})$$
$$G_{r+1} = [\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+1}, \ldots, \lambda_k] = (t_1^{(r+1)}, t_2^{(r+1)}, \ldots, t_{(k-\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}^{(r+1)})$$

der Reihe nach die symmetrischen Gruppen der in den eckigen Parenthesen enthaltenen Elemente, dann ist die Gruppe Γ die aus der Zusammensetzung der Gruppen $G_1, G_2, \ldots G_{r+1}$ entstehende Gruppe, d. h.

$$\Gamma = [G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_r,\ G_{r+1}].$$

Die Ordnung ν dieser Gruppe ergiebt sich nunmehr auf Grund dessen, dass das Product

$$t'_{\beta_1} t'_{\beta_2} \ldots t^{(r)}_{\beta_r} t^{(r)}_{\beta_{r+1}}$$

jede Substitution von Γ und jede nur einmal wiedergiebt, wenn wir darin für

$$\beta_1 = 1, 2, \ldots, \alpha_1!$$
$$\beta_2 = 1, 2, \ldots, \alpha_2!$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_r = 1, 2, \ldots, \alpha_r!$$
$$\beta_{r+1} = 1, 2, \ldots, (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!$$

setzen.

Die Substitutionen $t_\alpha^{(i)}$ und $t_\beta^{(k)}$ sind nämlich immer vertauschbar, d. h.

$$t_\alpha^{(i)} t_\beta^{(k)} = t_\beta^{(k)} t_\alpha^{(i)}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i!; \quad \beta = 1, 2, \ldots, \alpha_k!; \quad i = 1, 2, \ldots, r+1; \quad i \lesseqgtr k);$$

folglich kann jede Substitution der Gruppe Γ in der Form

$$t'_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t_{\beta_r}^{(r)} t_{\beta_{r+1}}^{(r+1)}$$

geschrieben werden.

Es ist ferner leicht zu erweisen, dass die Gleichung

$$t''_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t_{\beta_{r+1}}^{(r+1)} = t'_{\gamma_1} t''_{\gamma_2} \ldots t_{\gamma_{r+1}}^{(r+1)} \qquad (a)$$

nur dann statt hat, wenn

$$\beta_1 = \gamma_1, \ \beta_2 = \gamma_2, \ \ldots, \ \beta_{r-1} = \gamma_{r+1}.$$

Aus der Gleichung (a) folgt nämlich, dass

$$t'^{-1}_{\gamma_1} t'_{\beta_1} = t'_{\gamma_2} t''_{\gamma_3} \ldots t_{\gamma_{r+1}}^{(r+1)} \left(t_{\beta_{r+1}}^{(r+1)}\right)^{-1} \left(t_{\beta_r}^{(r)}\right)^{-1} \ldots (t'_{\beta_2})^{-1}$$

ist, da aber die auf der rechten Seite stehende Substitution die Elemente

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_{\alpha_1}$$

unverändert lässt, so muss

$$(t'_{\gamma_1})^{-1} t'_{\beta_1} = 1,$$

d. h.

$$t'_{\beta_1} = t'_{\gamma_1},$$

oder

$$\beta_1 = \gamma_1$$

sein. Dann kann aber (a) so geschrieben werden:

$$t''_{\beta_2} t'''_{\beta_3} \ldots t_{\beta_{r+1}}^{(r+1)} = t''_{\gamma_2} t'''_{\gamma_3} \ldots t_{\gamma_{r+1}}^{(r+1)};$$

wird die vorher benützte Schlussweise r-mal angewendet, so ergiebt sich schliesslich, dass (a) in der That nur dann bestehen kann, wenn

$$\beta_1 = \gamma_1, \ \beta_2 = \gamma_2, \ \ldots, \ \beta_{r+1} = \gamma_{r+1}$$

ist, dann ergeben aber die Producte

$$t'_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t_{\beta_{r+1}}^{(r+1)}$$
$$(\beta_i = 1, 2, \ldots, \alpha_i!; \quad i = 1, 2, \ldots, r, \ r+1)$$

alle Substitutionen der Gruppe Γ in der That einmal und nur einmal, und auf diese Weise ist die Ordnung der Gruppe Γ,

$$\nu = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_r! (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!.$$

Die Anzahl derjenigen Werthe aber, die der Ausdruck

$$y = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha_1})^{m_1} (\lambda_{\alpha_1+1} \lambda_{\alpha_1+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_2} \ldots$$
$$\ldots (\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r})^{m_r}$$

bei Anwendung sämmtlicher Substitutionen der symmetrischen Gruppe k-ten Grades annimmt:

$$\pi = \frac{k!}{\nu} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_r! (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!}.$$

Sind diese Werthe

$$y_1, y_2, \ldots, y_\pi$$

so ist

$$G(y) \equiv \prod_{i=1}^{\pi} (y - y_1) \equiv y^\pi + A_1 y^{\pi-1} + \cdots + A_\pi = 0$$

die Gleichung, die y befriedigt, die in ihr enthaltenen Coëfficienten

$$A_1, A_2, \ldots, A_\pi$$

sind als symmetrische Functionen der Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,$$

durch die Coëfficienten der Gleichung

$$\varphi_k(\lambda) = 0$$

und somit auch mit Hülfe der Elemente a_{ik} rational ausdrückbare Grössen. Insoferne die Elemente a_{ik} unbestimmt bleiben, ist $G(y)$ irreducibel, so dass wir in $G(y)$ einen der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ kennen lernen.

Auf diese Weise ist es klar, dass jeder einzelnen aus positiven Zahlen bestehenden Lösung der diophantischen Gleichungen unter (1) je ein irreducibeler Factor der charakteristischen Gleichung $\Phi_{kn}(y)$ entsprechen wird und umgekehrt. Die Anzahl dieser irreducibeln Factoren stimmt also mit der Anzahl derjenigen Zerlegungen in gleiche oder verschiedene positive

Zahlen überein, in denen die Anzahl der Terme k nicht überschreitet.*

Die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in α positive Glieder können wir auch auf analytischem Wege angeben. Wenn wir nämlich die rationale Funktion

$$\omega_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\alpha)}$$

in der Umgebung der Stelle $x=0$ nach Potenzen von x entwickeln, dann giebt in dieser der Coëfficient von x^n den präcisen Werth von l_α,** so dass also

$$C_\alpha = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \omega_\alpha(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \omega_\alpha^{(n)}(0)$$

ist; $\varrho_{k\,n}$, die Zahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{k\,n}(y)$, kann also folgendermaassen dargestellt werden

$$\varrho_{k\,n} = C_1 + C_2 + \cdots + C_k =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \omega_1(x)}{dx^n} + \frac{d^n \omega_2(x)}{dx^n} + \cdots + \frac{d^n \omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\{\omega_1(x) + \omega_2(x) + \cdots + \omega_k(x)\}\right]_{x=0};$$

bezeichnet man also die rationale Function

$$\omega_1(x) + \omega_2(x) + \cdots + \omega_k(x)$$

---

* Die einfache Bemerkung, dass die aus der Gradzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{k\,n}(y)$ gebildete Summe mit dem Grade der $\Phi_{k\,n}(y)$ selbst gleich ist, führt zu dem analytisch-zahlentheoretischen Resultat, dass

$$\Sigma \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_r!\,(k-\alpha_1-\cdots-\alpha_r)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

ist, wo die Summe sich auf die Zahlen $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ bezieht und auf jede positive Lösung der diophantischen Gleichungen

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r = n$$
$$(r=1,2,\ldots,k)$$

erstreckt werden muss. In diesen diophantischen Gleichungen sind $m_1, m_2, \ldots, m_r$ beliebige nicht negative Zahlen.

** S. Euler, Introductio in analysin infinitorum. Caput XVI. De partitio numerorum. p. 263.

mit $\Omega_k(x)$, so dass

$$\Omega_k(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots + \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

ist, so kann man endlich die Anzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{k\,n}(y)$ in der folgenden Form darstellen:

$$\varrho_{k\,n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Omega(0).$$

2. Ist $k \geq n$, so liefern sämmtliche positive Lösungen der diophantischen Gleichungen

$$l_1 + l_2 + \cdots + l = n$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, k)$$

die sämmtlichen möglichen Zerlegungen der ganzen Zahl n. Die Anzahl sämmtlicher Zerlegungen von n können wir, wie das schon EULER* gezeigt hat, in der Weise erhalten, dass wir die transcendente Function

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha}$$

in der Umgebung der Nullstelle in eine Potenzreihe entwickeln und den Coëfficienten von x^n nehmen. Folglich ist im vorliegenden Falle die Anzahl der irreducibelen Factoren

$$\varrho_{k\,n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Psi^{(n)}(0)$$

und, wie ersichtlich, *ist diese Zahl von k ganz unabhängig.*

Als interessantes Nebenresultat heben wir hervor, dass, so oft $k \geq n$ ist, auch

$$\varrho_{k\,n} = \frac{1}{n!}\,\Omega_k^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}\,\Psi^{(n)}(0),$$

ist, woraus wir das Resultat erhalten, dass

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha}$$

---

* S. EULER, Intr. in analysin infr. p. 269.

die Product-Darstellung der transcendenten Function

$$\Omega(x) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{\alpha})}.$$

ist.

3. Ist $n = \frac{k(k+1)}{2}$, so wird unter den Ausdrücken

$$y = \lambda_1^{l_1}\lambda_2^{l_2}\cdots l_q^{l_k}$$
$$(l_1 + l_2 \cdots + l_q = n)$$

auch

$$V = x_1 x_2^2 x_3^2 \ldots x_k^k$$

vorkommen, da

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} = n$$

ist. Der auf diese Weise bestimmte Ausdruck nimmt bei den sämmtlichen Vertauschungen der Wurzeln

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$$

Werthe in der Anzahl von $k!$ an, in Folge dessen der dem V entsprechende irreducibele Factor der charakteristischen Function $\Phi_{k\,n}(y)$ das Polynom der GALOIS'schen Resolvente der Gleichung k-ten Grades

$$\varphi_k(\lambda) = 0$$

liefert.

Ist also $k \geqq \frac{n(n+1)}{2}$, so ist das Vorkommen des Polynoms der GALOIS'schen Resolventen unter den irreducibelen Factoren der charakteristischen Function $\Phi_{k\,n}(y)$ unbedingt gesichert.

Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung der GALOIS'schen Resolvente das folgende neue Verfahren. Vor allem stellen wir eine derjenigen Substitutionen dar, deren charakteristische Gleichung jene gegebene Gleichung k-ten Grades

$$f(x) = 0$$

ist, deren GALOIS'sche Resolvente wir suchen. Sodann bilden wir deren inducierte Substitution $\frac{k(k+1)}{2}$-ten Grades und zerlegen die charakteristische Function dieser inducierten Substitution in ihre irreducibelen Factoren. Unter diesen liefern diejenigen höchsten Grades Polynome vom GALOIS'schen Resolventen.

II.

Es sollen noch die erhaltenen Resultate an einigen speciellen Fällen erläutert werden.

1. Es sei z. B. $k = 4$ und es sei die Anzahl der irreducibelen Factoren von

$$\Phi_{41}(y),\ \Phi_{42}(y),\ \Phi_{43}(y),\ \Phi_{44}(g),\ \Phi_{45}(y),\ \Phi_{46}(y),\ \Phi_{47}(y),\ \ldots$$

zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bilde man den rationalen Bruch

$$\Omega_4(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \\ + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)};$$

man entwickele nun diese Function in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach Potenzen von x, so ergiebt sich

$$\Omega_4 x = x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + 15x^8 + 18x^9 + \cdots,$$

so dass die Zahlen der in den Zerlegungen enthaltenen irreducibelen Factoren die folgenden sein werden:

$$\varrho_{41} = 1,\ \varrho_{42} = 2,\ \varrho_{43} = 3,\ \varrho_{44} = 5,\ \varrho_{45} = 6,\ \varrho_{46} = 9,\ \varrho_{47} = 11,\ \ldots$$

2. Ist $k \geqq n$, so liefern die Coëfficienten der Potenzreihe

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha} =$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \\ + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 239x^{16} + \cdots,$$

die Anzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{kn}(y)$, so dass diese Anzahlen für alle nicht negative g die folgenden sind:

für	$\Phi_{g+11}(y)$	ist die Anzahl d. irreducibelen Factoren	$\varrho_{g+11} = 1$	
„	$\Phi_{g+22}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+22} = 2$	
„	$\Phi_{g+33}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+33} = 3$	
„	$\Phi_{g+44}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+44} = 5$	
„	$\Phi_{g+55}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+55} = 7$	(T)
„	$\Phi_{g+66}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+66} = 11$	
„	$\Phi_{g+77}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+77} = 15$	
„	$\Phi_{g+88}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+88} = 22$	
„	$\Phi_{g+99}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+99} = 30$	
„	$\Phi_{g+1010}(y)$	„ „ „ „ „ „	$\varrho_{g+1010} = 42$ etc.	

3. Es sei die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 \\ x_3 &= \alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3 \end{aligned} \qquad (S)$$

gegeben und seien λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varphi_3(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dann wird sich die inducierte Substitution zweiten Grades von S durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} U_0 = {} & \alpha_1^2 u_0 + \alpha_2^2 u_1 + \alpha_3^2 u_2 + 2\alpha_1\alpha_2 u_3 + \\ & + 2\alpha_1\alpha_3 u_4 + 2\alpha_2\alpha_2 u_5 \\ U_1 = {} & \beta_1^2 u_0 + \beta_2^2 u_1 + \beta_3^2 u_2 + 2\beta_1\beta_2 u_3 + \\ & + 2\beta_1\beta_3 u_4 + 2\beta_2\beta_3 u_5 \\ U_2 = {} & \gamma_1^2 u_0 + \gamma_2^2 u_1 + \gamma_3^2 u_2 + 2\gamma_1\gamma_2 u_3 + \\ & + 2\gamma_1\gamma_3 u_4 + 2\gamma_2\gamma_3 u_5 \\ U_3 = {} & \alpha_1\beta_1 u_0 + \alpha_2\beta_2 u_1 + \alpha_3\beta_3 u_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) u_3 + \\ & + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) u_4 + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) u_5 \\ U_4 = {} & \alpha_1\gamma_1 u_0 + \alpha_2\gamma_2 u_1 + \alpha_3\gamma_3 u_2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) u_3 + \\ & + (\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) u_4 + (\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) u_5 \\ U_5 = {} & \beta_1\gamma_1 u_0 + \beta_2\gamma_2 u_1 + \beta_3\gamma_3 u_2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) u_3 + \\ & + (\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) u_4 + (\beta_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) u_5 \end{aligned}$$

ergeben. Die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{32}(y) = 0,$$

also der charakteristischen Gleichung dieser inducierten Substitution sind

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3,\ \lambda_2\lambda_3;$$

die Anzahl der irreducibelen Factoren aber, wie das die zweite Reihe der Tabelle unter (T) zeigt, ist 2.

Den ersten irreducibelen Factor werden im Sinne des Vorhergegangenen die Werthe

$$\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2, \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

den zweiten aber die Werthe

$$\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3,\ \lambda_2\lambda_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zu Null machen.

Die in der Reihe (1) stehenden Werthe sind aber nichts anderes als die Wurzeln der zum Quadrate der Substitution S, nämlich zu S^2, gehörigen charakteristischen Gleichung; wenn also

$$\begin{aligned} c_{11} &= \alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2 + \gamma_1\alpha_3 & c_{21} &= \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \gamma_2\alpha_3 \\ c_{12} &= \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\beta_3 & c_{22} &= \alpha_2\beta_1 + \beta_2^2 + \gamma_2\beta_3 \\ c_{13} &= \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 & c_{23} &= \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} &= \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 \\ c_{32} &= \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\beta_3 \\ c_{33} &= \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 + \gamma_3^2 \end{aligned}$$

gesetzt wird, so sind die in der Reihe (1) enthaltenen Werthe die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-y & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22}-y & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-y \end{vmatrix} = 0.$$

Die in der Reihe (2) gefassten Werthe aber sind nichts anderes, als die Wurzeln der zur adjungierten Substitution zweiten Grades der Substitution (S) gehörigen Gleichung. Wenn also

$$\begin{aligned} \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 &= A_1 & \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 &= B_1 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 &= \Gamma_1 \\ \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 &= A_2 & \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 &= B_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 &= \Gamma_2 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 &= A_3 & \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 &= B_2 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &= \Gamma_3 \end{aligned}$$

ist, dann sind die in Reihe (2) enthaltenen Werthe die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_1-y & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2-y & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3-y \end{vmatrix} = 0.$$

Infolgedessen gelangen wir zur folgenden expliciten Zerlegung der Function $\Phi_{23}(y)$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2-y & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2-\gamma & \beta_3^2 & 2\beta_1\beta_2 & 2\beta_1\beta_3 & 2\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2-y & 2\gamma_2\gamma_1 & 2\gamma_1\gamma_3 & 2\gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-y & \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2 \\ \alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1 & \alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1-y & \alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2 \\ \beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1 & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2-y \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} c_{11}-y & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-y & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1-y & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2-y & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3-\gamma \end{vmatrix}$$

14[I].

BEITRÄGE ZUR FRAGE DER FETTBILDUNG IN DER LEBER.

Von Dr. PAUL von PLÓSZ, Professor a. d. Universität Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 16. Januar 1899.

Aus „Mathematikai és természettudományi Értesitö“ (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger) Bd. XVII p. 157—168.

1. Mittheilung.

Die Rolle und das Schicksal der Kohlehydrate im Organismus ist eine alte Frage des Stoffwechsels. Indem ich über die, in dieser Richtung in der letzten Zeit gemachten Untersuchungen spreche, halte ich es für meine Pflicht die ausgiebige Hilfe der Herrn Dr. Karl Doktor und Dr. Eugen Pozsonyi zu erwähnen; ich verdanke diesen Mitarbeitern hauptsächlich die Verfertigung der vielen mikroskopischen Präparate.

Bevor es bekannt war, dass auch im gesunden Organismus Zucker und Kohlehydrat vorkommt, drehte sich die Frage immer nur darum, ob sich im Organismus aus den durch die Nahrungsmittel eingeführten Kohlehydraten Fett bildet oder nicht?

Die Frage bezüglich der Rolle der Kohlehydrate fand eine theilweise Lösung als Claude Bernard[1] und mit ihm, beinahe zu gleicher Zeit Hensen[2] im Jahre 1867 das Glycogen der Leber entdeckten.

Nach dieser Entdeckung wurde es bald klar, dass sich aus den eingeführten Kohlehydraten Glycogen bildet.

Mit der Entdeckung des Glycogens entstand auch die Frage der vitalen und postmortalen Glycogene, welche den Gegenstand

so vieler Untersuchungen bildete und von welcher man sagen kann, dass sie auch heute noch nicht ganz geklärt ist.

Ueber den Ursprung des Glycogens haben zahlreiche und verschiedenartige Versuche ergeben, dass dieses sich sowohl aus den Kohlehydraten der Nahrungsmittel, wie auch aus den eiweisshältigen Stoffen bildet, ja dass vielleicht sogar die Fette, besonders das darin enthaltene Glycerin, auch Glycogen bilden, obwohl in Bezug auf das Glycerin die Experimentaluntersuchungen noch zu keinem endgiltigen Resultat geführt haben.

Die Bildung des Glycogens aus Kohlehydraten ist nicht nur vom chemischen Standpunkte anzunehmen, sondern auch das Experiment zeigt, dass die Umwandlung rasch unmittelbar nach der Resorption erfolgt.

Unter vielen derartigen Versuchen will ich mich bei dieser Gelegenheit auf die Versuche SALAMON'S[3] berufen, welcher zuerst fand, dass, wenn man in die Mesenterialvene des Kaninchens Zucker einspritzt, dieser Zucker bei gehöriger Versuchsanordnung die Leber nicht passiert, sondern daselbst zurückgehalten wird und sich als Glycogen anhäuft. Dass das im Darmkanal resorbierte Kohlehydrat sich in der Leber als Glycogen anhäuft, beweisen, ausser den erwähnten Versuchen, zahlreiche andere Beobachtungen, so dass diese Thatsache als feststehend zu betrachten ist.

Die Untersuchungen, welche das Schicksal der Kohlehydrate behandeln, haben auch nachgewiesen, dass die mit den Nahrungsmitteln eingeführten Kohlehydrate die Hauptquelle des Fettes im Organismus darstellen.

Durch diese Versuche ist es daher zur Gewissheit geworden, dass aus den Kohlehydraten im Organismus einerseits Glycogen, anderseits Fett gebildet wird. Wenn wir den Verlauf der Ernährung mittels Kohlehydraten betrachten, so sehen wir, dass das Fett diejenige Substanz ist, welche sich allmählig in immer grösserer Menge im Körper anhäuft, während die Menge des Glycogens über eine gewisse Grenze nicht zunimmt, und im allgemeinen bedeutend hinter der Fettanhäufung zurück bleibt. Die vergleichende Bestimmung des Glycogens und des Fettes bei einem gemästeten Thiere zeigt, dass die Menge des Fettes diejenige des Glycogens 10—20fach übersteigt.

In Anbetracht, dass das Fett und Glycogen aus denselben Quellen, nämlich aus den Kohlehydraten der Nahrung stammen, entsteht die weitere Frage über das Verhältniss und die Bildungsweise der beiden Verbindungen.

Es fragt sich, ob sich dieselben neben einander, oder das eine aus dem andern bildet. In diesem letzteren Falle müsste man annehmen, dass das Glycogen zuerst entsteht und aus diesem Fett gebildet wird. Dies vorausgesetzt wäre das Glycogen als ein Uebergangsprodukt zu betrachten, aus welchem nach und nach Fett entsteht und daher kommt es auch, dass die Menge des Glycogens nur bis zu einem bestimmten Grade ansteigt und dort constant bleibt, während das aus ihm gebildete Fett, welches nicht den Charakter des Uebergangsproduktes besitzt, sich anhäuft.

Der erste Vertreter der Ansicht, dass aus Kohlehydraten sich Fett bilde, war LIEBIG[5] der durch Versuche, Beobachtungen und theoretische Ableitungen die Ansicht begründete, dass das Fett nicht nur aus dem durch die Nahrung eingeführten Fette, sondern auch aus den eiweisshaltigen Stoffen und Kohlehydraten gebildet werden kann. Die LIEBIG'sche Auffassung wurde bekämpft durch DUMAS[6], BOUSSINGAULT[7], PAYEN[8], MILNE-EDWARDS[9], ferner PETTENKOFER[10] und VOIT[11], dann STOHMANN[12], KÜHN[13] und Anderen; gewann jedoch immer mehr Anhänger.

Man erkannte nach und nach, dass ausser den Fett enthaltenden Nahrungsmitteln auch die eiweisshaltigen Nahrungstoffe eine Quelle des Fettes darstellen; später wurde auch nachgewiesen, dass die Kohlehydrate als Hauptquelle der Fettbildung zu betrachten sind. So haben TSCHERINOFF[14], WEISKE und WILDT[15], LAWES und GILBERT[16], SOXHLET[17], SCHULZE[18], HENEBERG[19], MEISSL und STROHMER[20], TSCHERWINSKY[21], CHANIEWSKI[22], MUNK[23], ERWIN VOIT[24] und LEHMANN[25], dann RUBNER[26] und endlich PFLÜGER[27] grösstentheils durch neue, auf verschiedene Art zusammengestellte Versuche endgiltig festgestellt, dass sich auch aus den Kohlehydraden Fett bildet.

Ich glaube, dass hier besonders noch HANRIOT's[28] Versuche hervorzuheben sind, der gefunden hat, dass nach Einführen von Kohlehydraten der Respirationsquotient an Werth steigt, d. h. dass das Verhältniss des durch das Athmen aufgenommenen

Sauerstoffs und der ausgeathmeten Kohlensäure sich so ändert, dass während bei dem hungernden Thiere der Quotient $\frac{CO_2}{O} = 0.83$ — 0·86 ist, nach Fütterung mit Kohlehydraten die ausgeschiedene Menge CO_2 derart zunimmt, dass der Werth des Quotienten sich über die Einheit erhebt (1·1—1·28). Die Thatsache ist zunächst dadurch zu erklären, wenn angenommen wird, dass sich aus dem Zucker Kohlensäure und Wasser abspalten und sich auf diese Weise Fette bilden.

Nach HANRIOT's Ansicht soll dies so schnell geschehen, dass die in den Organismus eingeführte Stärke und Zucker sich schon nach 4—5 Stunden, bei Abspaltung der Kohlensäure und des Wassers mit quantitativer Genauigkeit in Fett umwandelt. Diese Auffassung entspricht nicht ganz jenen Kenntnissen, welche wir über das Entstehen und die Rolle des Glycogens als sicher begründet betrachten; da nach diesen angenommen werden muss, dass wenigstens ein Theil der Kohlehydrate nach der Resorption in der Leber sofort in Glycogen verwandelt wird, und dieses Glycogen dort einige Zeit beständig ist. Im Ganzen und Grossen kann sie jedoch mit meinen, später zu beschreibenden, Beobachtungen in Einklang gebracht werden, da diesen zufolge bei Ernährung mit Stärke oder Zucker in der Leber Glycogen und mit diesem Fett auftritt, die Fettbildung demnach der Resorption unmittelbar folgt.

Alle Erfahrungen weisen dahin, dass bei reichlicher Ernährung mit Kohlehydraten im Organismus Fett angehäuft wird. Die Erfahrung zeigt sogar auch, dass die Quantität des gebildeten Fettes grösser ist, als diejenige, welche *auf Umwegen durch Ersparniss gewisser Albuminderivate* aus dem zugleich eingeführten Eiweisse entstehen könnte.

Das eingeführte Eiweiss kann nämlich bei Mastthieren im Ganzen genommen geringer sein als das täglich gebildete Fett, wobei auch noch in Betracht gezogen werden muss, dass das Eiweiss Stickstoff und Schwefel enthält, welche keinen Bestandtheil des Fettes bilden und welche demnach aus dem Eiweiss abgerechnet werden müssen. Dies alles lässt es unzweifelhaft erscheinen, dass das Fett, wenn es auch theilweise aus dem Ei-

weiss stammt, sich doch grösstentheils aus den Kohlehydraten bildet.

Die Art und Weise der Bildung ist indessen bis jetzt noch nicht bekannt, weder die Art der chemischen Umwandlung, noch der Ort der Bildung ist festgestellt.

Fig. 1.

XVII. Kaninchen. Aus der Leber des Thieres nach 7tägigem Hungern. Enthält keinerlei Fett. Zeiss'sches Mikroskop Project-Ocular Nr. 2, Objectiv Nr. E. 370fache Vergrösserung.

Pavy[29] hat in seinem Kampfe gegen die Existenz der vitalen Glycogene behauptet, dass die in den Darmkanal eingeführten Kohlehydrate schon während der Resorption in Fett umgewandelt und als solches resorbiert werden; ja er behauptete sogar, dass das Glycogen der Leber nicht aus den Kohlehydraten, sondern aus Eiweiss entsteht. Derselbe stützte seine Behauptung auf die Beobachtung, dass er in den Darmzotten eines mit Hafer gefütterten

Kaninchens Fetttropfen vorfand, welche sich durch Osmiumsäure schwarz färbten, während diese Fettkörner in den Darmzotten des hungernden Kaninchens fehlten.

Ich habe diese Beobachtungen, welche auf die Fettbildung neues Licht zu werfen versprachen und desshalb von grosser Tragweite schienen, zum Gegenstand neuer Versuche gemacht.

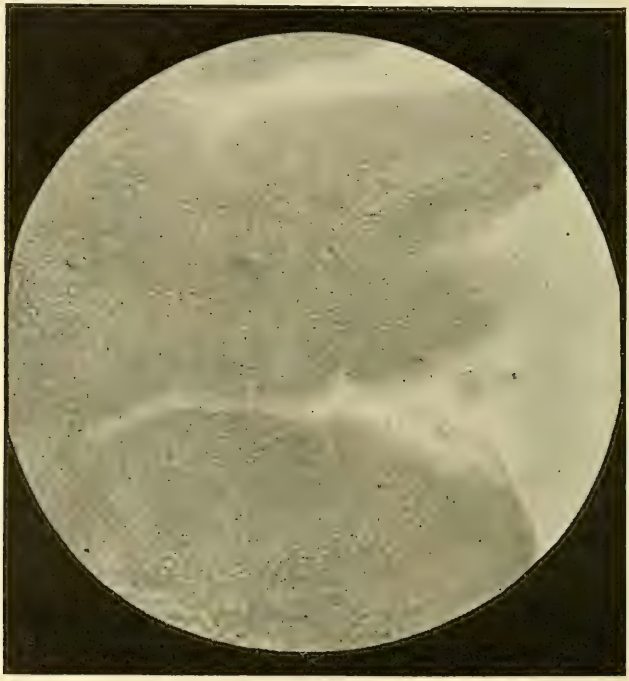


Fig. 2.

Dasselbe Versuchsthier; aus dessen Dünndarme (hungerte 7 Tage). Enthält kein Fett. Vergrösserung wie die in Fig. 1.

An Pavy's Versuchen ist auszusetzen, dass er nicht mit solchen Nahrungsmitteln arbeitete, welche frei von Fett waren; denn der Hafer enthält wie bekannt im Durchschnitt 4—4.50% Fett; ferner ist daran auszusetzen, dass er ein solches Nahrungsmittel anwandte, welches ausser Stärke auch noch Eiweiss enthält. Es war daher, um diese Fehler zu vermeiden, nöthig in

einer Reihe neuer Versuche den Einfluss der Ernährung durch Stärke auf die Fettbildung in den Wänden des Darmes und in der Leber zu bestimmen. Zu diesem Zwecke haben wir in einer Reihe von Versuchen fettfreien Hafer, in einer zweiten Reihe reine fettfreie Stärke, in einer dritten aber eine reine Trauben-Zuckerlösung als Nahrungsmittel angewendet, um auf diese Weise

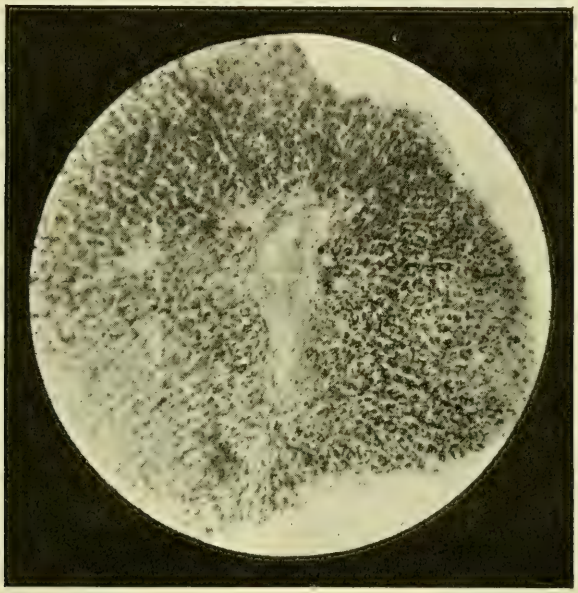


Fig. 3.

XX. Kaninchen. Aus dessen Leber (nach 7tägigem Hungern 5½stündige Nährung mit Hafer und Stärke). Gefüllt mit Fett.

Zeiss'sches Mikroskop Nr. 2, Project-Ocular und Objectiv C. 150fache Vergrösserung.

den Einfluss des Fettes und des Eiweisses auf die Fettbildung gänzlich auszuschliessen.

Das Resultat der Versuche war folgendes:

1. Nach 5—6—10 Tage dauernden Hungerns schwindet beim Kaninchen sowohl aus den Zotten des Darmes als auch aus den Leberzellen jene fettartige Substanz, welche unter dem Mikroskop mittels Hyperosminsäure die Fettreaktion zeigt. (S. Fig. 1 und 2).

2. Wenn wir dem Kaninchen, welches mehrere Tage gehungert hat — dessen Leber demnach in Bezug auf die Reaction mit Osminsäure fettfrei war — fettfreien Hafer gaben und es fünf bis sieben Stunden darnach tödteten, zeigten sich die Darmzotten bei Behandlung mit Osmiumsäure fettfrei, in der Leber

Fig. 4.

XII. Kaninchen. Dünndarm (nach 5tägigem Hungern 4 Stunden hindurch mit Zucker genährt). Enthält kein Fett.

Zeiss'sches Mikroskop Nr. 2, Project-Ocular und Objectiv Nr. E. 370fache Vergrösserung.

hingegen war, nach Behandlung mit Osmiumsäure Fett zu finden. (S. Fig. 3.)

Ebenso traten in der Leber Fettkörner auf, wenn wir statt Hafer *reine fettfreie Stärke* oder bei einem anderen Versuche eine *reine fettfreie Zuckerlösung* in den Darmtrakt *einführten*; in beiden Fällen blieb dabei die Darmwand frei von Fett. (S. Fig. 4).

Nachdem unter solchen Umständen in der Leber sich auch Glycogen ablagert, wie das allgemein bekannt ist, so zeigen uns die Versuche, dass aus den *in den Darmkanal eingeführten Kohlehydraten in der Leber Glycogen und zugleich Fett gebildet wird.*

Die Glycogen- und die Fettbildung treten demnach gleichzeitig auf, oder einander unmittelbar folgend.

Wenn man die Möglichkeiten, die hier obwalten, in Betracht zieht, könnte angenommen werden, dass der Verlauf entweder

Fig. 5.

XVIII. Kaninchen. Dünndarm (5tägiges Hungern, darnach 5stündige Ernährung mit gewöhnlichem Hafer). Voll mit Fett.

Zeiss'sches Mikroskop Project-Ocular Nr. 2 und Objectiv Nr. C. 150fache Vergrösserung.

ein derartiger ist, dass sich aus den Kohlehydraten parallel Glycogen und Fett in der Weise bildet, dass aus einem Theil des Kohlehydrates Glycogen, aus dem anderen Fett entsteht, oder aber dass aus dem entstandenen Glycogen sofort die Fettbildung beginnt.

Das Vorhandensein des Fettes wurde bei diesen Versuchen vorerst bloss durch die mikroskopischen Befunde und auf dem Wege der mikrochemischen Reaction nachgewiesen.

Vielfache Versuche und Beobachtungen zeigen, dass diese kleineren und grösseren Kügelchen, welche durch Hyperosmium-

säure schwarz gefärbt werden, aus Fett bestehen. Es kann theoretisch nicht geleugnet werden, dass ausser dem Fett auch andere Substanzen vorhanden sein können, welche durch Hyperosmiumsäure schwarz gefärbt werden; indessen ist bisher diese mikrochemische Reaction, als für das Fett characteristisch, allgemein angenommen.

Die vorliegenden Versuche scheinen selbst auch dafür zu sprechen, dass die mit Hyperosmiumsäure gefärbte Substanz mit dem Fett identisch ist, und zwar deshalb:

1. Weil in den Epithelzellen der Darmzotten des mit nicht entfetteten, folglich Fett enthaltenden, Hafers gefütterten Kaninchens, mit Osmiumsäure sich färbende Fettkügelchen zu finden sind (s. Fig. 5), und eben solche sich in der Leber neben dem Glycogen vorfinden.

2. Sind in den Darmzotten des mit entfetteter Stärke genährten Kaninchens durch Osmiumsäure sich schwarz färbende Fetttropfen nicht zu finden, in der Leber dagegen sind sie vorhanden.

3. Bei den hungernden Kaninchen sind weder in den Darmzotten, noch in der Leber Fetttropfen zu finden.

Es wäre wichtig ausser der mikrochemischen Reaction und dem mikroskopischen Verhalten auch auf chemischem Wege die Fette sowohl qualitativ als quantitativ nachzuweisen. Die Untersuchung stösst jedoch auf Schwierigkeiten, welche durch den Lecithingehalt der Leber bedingt sind.

In Ermangelung genügender thatsächlicher Grundlage muss man zwar auf weitergehende theoretische Ableitungen verzichten; wir halten es indessen für erwähnenswerth, dass der Prozess, durch welchen sich aus dem Zucker Fett bildet, im Ganzen genommen nicht auf oxydationalem, sondern reductionalem Wege vor sich geht; denn sowohl die höheren Fettsäuern, als auch deren Glyceride, die neutralen Fette, enthalten im Ganzen genommen im Verhältnisse zu den Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen weniger Sauerstoff, als die Kohlenhydrate.

Daraus folgt, dass, indem sich aus den Kohlehydraten Triglyceride bilden, dies ein Desoxydations-Prozess ist. Wir brauchen hier also kein freies Oxygen, was mit dem Umstande vollkommen

übereinstimmt, dass die Leber den grössten Theil des Blutes aus der Porta bekommt, welche Venenblut führt, welches die Capillaren des Darmkanales schon passierte.

In den Wänden des Darmkanals, wo sauerstoffhaltiges Blut circuliert, bildet sich aus den Kohlehydraten kein Fett, dagegen entsteht es in der mit oxygenarmem Blute versorgten Leber.

Litteratur.

1. Cl. Bernard: Sur le mécanisme physiologique de la formation du sucre dans le foie. Compt. rendus.

2. V. Hensen: Ueber Zuckerbildung in der Leber. Virchows Archiv Bd. XI. Neue Folge Bd. I. S. 395.

3. G. Salomon: Ueber Glycogenbildung in der Leber. Virchows Archiv 1874. LXI. 343—377.

4. Huber: czitálva Comptes Rendus T. XVI. P. 663.

5. Liebig: Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Pharm. Centralbl. 1843. No. 13. — Annal. de Chem. et Pharm. XLV. — Thierchemie. — Comptes Rendus T. XVI. 1842. — Zeitschr. f. Biologie Bd. VI. In Voit's Abhandlung citiert. — Fettbildung aus Kohlehydraten. Berl. klin. Wochenschr. No. 31. 1878.

6, 7, 8. Dumas; Comptes Rendus. — Dumas Boussingault und Payen: Ueber die Fettbildung bei den Grasfressern und über die Entstehung der Milch. Pharmaceut. Centralbl. 1843. No. 40. — Annal. de Chim. et de Physiol. Trois. Sér. T. VIII. Mai 1843. — Boussingault: Pharm. Centralbl. 1843. pag. 629. — Payen: Comptes Rendus T. XVII. 1843.

9. Milne-Edwards: Comptes Rendus T. XVII. 1843.

10, 11. Pettenkofer und Voit: Annalen d. Chemie u. Pharmacie II. Suppl. Bd. 1862. — C. v. Voit: Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Chemisches Centralbl. 1868. — Ueber die Entwicklung der Lehre von der Quelle der Muskelkraft und einiger Theile der Ernährung seit 25 Jahren. Zeitschr. f. Biol. Bd. VI. 1870. — Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Sitzungsbericht. d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. 1885.

12. Stohmann: Journal f. Landwirtschaft. 1868 und 1869.

13. G. Kühn: Landwirtschaftl. Versuchsstation. Bd. X.

14. Michael Tscherinoff: Ueber die Abhängigkeit des Glycogengehaltes der Leber von der Ernährung. Moleschott X. Bd. 1870.

15. H. Weiske und E. Wildt: Untersuchungen über die Fettbildung im Thierkörper. Zeitschr. f. Biol. X. 1874.

16. Lawes J. B. and Gilbert J. H.: On the formation of the fat in the animal body. Journ. of Anat. and Physiol. 1877.

17. F. Soxhlet: Versuche über Fettbildung im Thierkörper. Zeitsch. d. landw. Verein in Bayern. 1881.

18. B. Schulze: Ueber Fettbildung im Thierkörper. Landw. Jahrbücher 1882.

19. W. Henneberg: Ueber Fleisch- u. Fettproduction in verschiedenem Alter und bei verschiedener Ernährung. Zeitschr. f. Biologie, Bd. 17. S. 295. 1882.

20. E. Meissl und F. Strohmer: Ueber die Bildung von Fett aus Kohlehydraten im Thierkörper. Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wissenschaften 88. III. Abth. 1883.

21. N. Tscherwinsky: Zur Frage über die Fettbildung im thierischen Organismus. Landw. Versuchsstationen 29. 317. 1883.

22. St. Chaniewski: Ueber Fettbildung aus Kohlehydraten im Thierorganismus. Zeitschr. f. Biologie 20.

23. Imm. Munk: Die Fettbildung aus Kohlehydraten beim Hunde. Virchow's Archiv 101. 1885.

24, 25. Erwin Voit u. C. Lehmann: Sitzungsber. d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. 1885.

26. Max Rubner: Ueber Fettbildung aus Kohlehydraten im Körper des Fleischfressers. Zeitschr. f. Biologie 22. 1886.

27. E. Pflüger: Ueber Fleisch u. Fettmästung. Pflüg. Arch. Bd. 52. S. 1. 1892. — Die Ernährung mit Kohlehydraten und Fleisch oder auch mit Kohlehydraten allein in 27 von Pettenkofer und Voit ausgeführten Versuchen beurtheilt. Ibidem 5. 239.

28. Hanriot: Sur l'assimilation des hydrates de carbone. Comptes Rendus T. 114. No. 7 1892.

29. Dr. F. W. Pavy: Die Physiologie der Kohlehydrate 1895.

14II.

BEITRÄGE ZUR FRAGE DER FETTBILDUNG IN DER LEBER.

Von Dr. PAUL von PLÓSZ, Professor a. d. Universität Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 13. Februar 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Ertesítö". (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, p. 183—188.

2. Mittheilung.

In der Sitzung vom 16. Januar d. J. hatte ich die Ehre, der Akademie über die Resultate derjenigen Versuche zu berichten, welche ich, mit Hilfe der Herren Dr. Karl Doctor und Dr. Eugen J. Pozsonyi, angestellt habe, und welche als Resultat ergeben haben, dass, bei Ernährung durch Kohlehydrate, ganz kurze Zeit nach dem Einführen der Kohlehydrate, in der Leber gleichzeitig mit dem Glycogen Fettkügelchen gebildet werden.

Dieses Versuchsresultat scheint mit unseren übrigen, in dieses Fach schlagenden Kenntnissen, in mehrfacher Beziehung zu stehen; welche Beziehungen und die davon abzuleitenden Consequenzen nach meiner bescheidenen Ansicht wichtig genug sind, um die Aufmerksamkeit der geehrten Akademie darauf zu lenken.

Nach dem erwähnten Ergebniss scheint die Folgerung am nächsten liegend, dass das nach Einführen des Kohlehydrates, in der Leber auftretende Fett unmittelbar aus dem Kohlehydrate selbst gebildet wird, so dass die Molekule des Kohlehydrates selbst den Stoff zur Fettbildung liefern.

Diese Folgerung ist nicht nur die am nächst liegende, sie ist auch mit allen unseren in dies Fach schlagenden Kenntnissen

in Uebereinstimmung, und überdies müssen wir sie schon deshalb als Hypothese aufstellen, weil diese Voraussetzung den mit dem Schicksal der Fettbildung und der Kohlehydrate sich befassenden Versuchen eine neue Richtung eröffnet und diesen als neue Grundlage dienen kann.

Wenn wir die Zusammensetzung der Kohlehydrate und des Fettes vergleichen, so sehen wir, dass die Molekule der sogenannten neutralen Fette im Vergleiche zu den in ihnen enthaltenen Carbonium- und Hydrogenelementen weniger Oxygen enthalten, als die Molekule der Kohlehydrate. Indem sich also aus den Kohlehydraten Fett bildet, muss ein solcher Process vor sich gehen, welcher in seinem Endresultate desoxydational ist.

Dieser Desoxydation entsprechend ist die Verbrennungswärme der Fette, mit ihrem absoluten Gewichte verglichen, auch grösser, als diejenige der Kohlehydrate.

Dieser Thatsache gegenüber müssen wir die Frage aufstellen, auf welche Weise diese Desoxydation zu Stande kommt, und welche Quelle die dazu nöthige Kraft liefert.

Wenn wir die Fettbildung begleitenden Umstände prüfen, fallen uns vor allem diejenigen Beobachtungen ins Auge, welche dahin weisen, dass, indem aus dem Kohlehydrate Fett gebildet wird, aus den Kohlehydrat-Molekulen sich Kohlendioxyd abspaltet. Wir begegnen in der Litteratur mehreren Daten, die sich hierauf beziehen (HANRIOT, HARLEY, LAVES, LEO, WEINTRAUD und mehrere), von welchen ich mich hauptsächlich nur auf zwei stützen will. Die eine stammt von HANRIOT*, die andere von VAUGHAN HARLEY**. — Beide Daten zeigen, dass sich nach Einführung von Kohlehydraten der Respirations-Quotient vergrössert. Das heisst, die Ausscheidung der Kohlehydrate im Organismus nimmt zu, während die Oxygenaufnahme unverändert bleibt. Bei mehreren Versuchen HARLEY's war sogar nach Einführen von Kohlehydrat neben der vermehrten Ausscheidung der Kohlensäure eine Verminderung der Oxygenaufnahme wahrnehmbar. Es scheint somit, als ob in Folge der Wärmeregulierung

* HANRIOT: Comptes rendus 1892. Vorgelegt und mit Anmerkungen begleitet von GAUTIER.

** VAUGHAN HARLEY: Journal of Physiology. Vol. XV, 1894.

diejenige Wärmeentwickelung, welche die Fettentwickelung begleitet, die Verlangsamung anderer oxydationalen Processe nach sich ziehen würde.

HANRIOT's Versuche wurden der Pariser Akademie von GAUTIER vorgelegt und von der Bemerkung begleitet, dass die durch das Einführen von Kohlehydraten gesteigerte Kohlensäureausscheidung, ohne die entsprechende Oxygenaufnahme, darauf hinweist, dass die Fette aus den Kohlehydraten dadurch entstehen, dass sich Kohlendioxyd davon abspaltet. Diese Abspaltung des Kohlendioxydes setzt er in eine Parallele mit den anaërobiotischen Gährungsprocessen.

Diese Art der Fettbildung stimmt mit allen den Umständen, welche das Aufsaugen der Kohlehydrate und das Umgestalten in Fett begleiten, vollkommen überein. Die Kohlehydrate gelangen aus dem Darmtrakte in die Leber und wandeln sich dort in Glycogen und Fett um. Keiner dieser Processe bedarf des freien Oxygens; freies Oxygen ist aber in der Leber nur in kleiner Menge vorhanden, denn die Leber erhält das Blut hauptsächlich durch die Vena portae, diese aber bringt solches Blut, welches die Capillaren des Magens und des Darmtraktes schon durchsetzt und den grössten Theil seines freien Oxygens dort zurück gelassen hat.

Die Leber ist folglich ein, gerade zu solchen, kein freies Oxygen heischenden, Processen geeignetes Organ.

Und man muss es als wahrscheinlich betrachten, dass in der Leber auch noch mehr derartige Processe vor sich gehen.

Derartige Abspaltungsprocesse, bei welchen die Aufnahme freien Oxygens keine Rolle spielt, welche folglich, in des Wortes gewöhnlicher Bedeutung, nicht auf Oxydation basieren, wurden so lange nicht mit Aufmerksamkeit verfolgt, bis PASTEUR die Anaërobiosis und die anaërobiotische Gährung entdeckte.

Durch die Anaërobiosis stellte er fest, dass sich bei dieser neben vollständiger Ausschliessung von freiem Oxygen Mikroorganismen entwickeln und vermehren und die zur organischen Funktion nothwendige Kraft ausschliesslich aus dem Abspaltungsprocesse nehmen.

Derartige Abspaltungsprocesse, welche mit anaërobiotischer Gährung verbunden sind, wurden seither in grosser Anzahl be-

kannt. Eine solche anaërobiotische Gährung geht z. B. vor sich, indem aus dem Zucker Milchsäure gebildet wird, eine solche ist z. B. jene, wenn das Ureum durch Aufnahme der Elemente des Wassers in Kohlensäure und Ammoniak zersetzt wird, eine solche ist z. B. die gewöhnliche alkoholische Gährung selbst, bei welcher der Zucker in Kohlensäure und Alkohol zersetzt wird.

Um etwaige Zweifel zu vermeiden, muss ich bemerken, dass das Ferment, welches zu einer solchen Gährung nothwendig ist, während des Gährungsprocesses nicht nur nicht geringer wird, sondern sogar zunimmt. Seine Menge ist folglich am Schlusse der Gährung ebenso gross oder mehr, als zu Beginn derselben in die Lösung der abzuspaltenden Menge hinein gelangte; der Umstand, dass das Ferment von aussen zu der gährenden Flüssigkeit gelangte, änderte nichts an dem Satze, dass die bei der Gährung nothwendigen gesammten Kräfte ohne freien Sauerstoff und ohne Mithilfe einer äusseren Kraft allein nur durch den Abspaltungsprocess gedeckt werden.

Wenn die Fettbildung in der That unmittelbar aus den Kohlehydraten, nebst Abspaltung der Kohlensäure, vor sich geht, so zeigt der Process mehrfache Analogien, mit allen jenen bei Anaërobiosis zu Stande kommenden Gährungsarten des Zuckers, welche von einer Abspaltung von Kohlensäure begleitet werden; zur richtigen Beleuchtung dieses Processes berufe ich mich auf das bekannteste Beispiel, auf die alkoholische Gährung des Zuckers. Bei dieser wird, ebenso wie bei der Fettbildung, Kohlensäure ausgeschieden; hier wie dort entstehen solche Verbindungen, welche im Verhältnisse zu ihrem absoluten Gewichte eine grössere Verbrennungswärme aufweisen, als die ursprüngliche Substanz, d. i. der Zucker.

Indessen ist, die alkoholische Gährung in Betracht gezogen, die Verbrennungswärme der gesammten Gährungsproducte geringer als die der abgespaltenen Substanz war. Das heisst, die Verbrennungswärme eines Zuckermolekuls ist in Grammmolekulen gerechnet 669,020 Cal., also grösser als die der daraus gebildeten zwei Grammmolekule Alkohol, welche zusammen 630,200 Cal. (Stohmann) oder 660,928 Cal. (Frankland) ausmachen.

Nachdem bei solchen Spaltungsprocessen der Unterschied zwischen der Verbrennungswärme der sich abspaltenden und der durch Abspaltung hervorgebrachten Verbindungen uns ein Maass von der Energie giebt, welche durch den Abspaltungsprocess frei wurde, sind wir im Stande die bei der alkoholischen Gährung frei werdende Quantität von Energie zu berechnen.

Bei der Fettbildung können wir hingegen, da wir nicht wissen, wie viele Molekule Kohlehydrat zur Bildung je eines Molekuls von neutralem Fett erfordert werden, auch die durch den Process frei gewordene Energie nicht in Zahlen ausdrücken. Doch ist es als unzweifelhaft anzunehmen, dass, während bei der Fettbildung aus den Kohlehydraten Kohlensäure abspaltet, bei diesem exothermischen Processe Energie frei wird und deshalb das zu Stande gekommene Fettmolekul weniger gebundene Energie enthält, d. h. seine Verbrennungswärme kleiner ist, als die der Verbrennungswärme jener gesammten Kohlehydratmolekule war, aus welchen das eine Molekul neutralen Fettes gebildet wurde.

Es ist demnach als unzweifelhaft zu betrachten, dass, indem aus den Kohlehydraten Fett gebildet wird und Kohlensäure sich abspaltet, *Energie* frei wird.

Der Organismus gewinnt daher, indem er aus den Kohlehydraten Fett bildet und diese in seinen Depôts aufspeichert, durch diesen Process einen doppelten Vortheil: erstens erhält er bei der Umbildung des Fettes Wärme, zweitens bringt er in sein Reservoir eine derartige Substanz, welche, ihr absolutes Gewicht gerechnet, eine grössere Menge Verbrennungswärme besitzt, als sie das Kohlenhydrat besessen hat. Die Verbrennungswärme eines Grammes Fett ist nämlich im Durchschnitte genommen 9412 Cal., während diejenige eines Grammes Zucker 3939 Cal. ist. Im Falle der Oxydation liefert somit das Fett bei gleichem Gewichte mehr Energie als der Zucker geliefert hätte, aus welchem es entstanden ist.

Die Auffassung, dass aus den Kohlehydraten unmittelbar nach der Aufsaugung in der Leber Fett gebildet wird, lässt die Fettbildung in einem von dem bisherigen vollständig abweichenden Lichte erscheinen. Sie zeigt uns nämlich, dass das Fett nicht aus dem Ueberschusse der Nahrung gebildet wird, nicht nur dann zu

Stande kommt, wenn die Nahrung in überflüssiger Menge in den Organismus eingeführt wird, sondern dass nach Einführen von Kohlehydraten, nach jeder einzelnen Mahlzeit Fett entsteht; nur in einem Falle, wenn es benöthigt wird, wird das Fett gleich verbraucht, während in dem anderen Falle, wenn es nicht nothwendig ist, es in den verschiedenen Fettreservoiren als Schmeer und Speck aufgespeichert wird. Der Process ist also in beiden Fällen qualitativ immer derselbe, nur quantitativ unterscheidet sich der eine vom andern.

Die erwähnten Versuche verlegen die aus den Kohlehydraten entstehende Fettbildung in die Leber, was aber die Möglichkeit durchaus nicht ausschliesst, dass ausser in der Leber auch in anderen Organen ein ähnlicher Process zu Stande kommen kann; inzwischen müssen wir es als unzweifelhaft ansehen, dass bei dieser Art der Fettbildung als Hauptorgan die Leber zu betrachten ist.

Diese neue Lehre über die Fettbildung ändert nicht nur unsere physiologischen Ansichten in vieler Beziehung, sondern sie greift auch in unsere pathologischen Auffassungen ein, besonders aber wirkt sie wesentlich umgestaltend und ergänzt unsere bis jetzt gehegten Ansichten über diabetische Erkrankungen.

Mit Bezug auf die Erklärung der diabetischen Erkrankungen erhielt in letzterer Zeit die Ansicht das Uebergewicht, dass bei Diabetikern die Hyperglycaemie des Blutes, d. h., das stufenweise Zunehmen des Zuckergehaltes, nicht aus der Ueberproduction des Zuckers stamme, sondern von der Abnahme der Fähigkeit im Organismus den Zucker zu zersetzen, herrührt; dazu kommt noch, dass der diabetische Organismus nicht im Stande ist, den Zucker in der Weise umzugestalten (wahrscheinlich in Fett umzubilden), dass er der Bahn des Blutes entzogen und zu späterem Verbrauche aufbewahrt werde.

Nach dem Erkennen der Fettbildung in der Leber wird die Erklärung der Diabetes in der Weise umgestaltet, dass nach dieser Theorie die Hyperglycaemie dadurch zu Stande kommt, dass die Leber den aus dem Darmtrakt oder von irgendwo anders hergebrachten Zucker nicht im Stande ist, in Fett umzugestalten und der Zucker infolge dessen sich in der Blutbahn anhäuft, d. h.,

dass eine Hyperglycaemie zu Stande kommt, welche dann die Meliturie zur Folge hat.

Die unmittelbare Ursache der Hyperglycaemie müssen wir also in dem ungenügenden Functionieren der Leber, d. i. in ihrer Functionsstörung *suchen.*

Diese weitgehende Folgerung kann aus der Lehre von der Fettbildung in der Leber direct abgeleitet werden, sobald wir annehmen, dass das nach dem Einführen von Kohlehydraten in der Leber zum Vorschein kommende Fett unmittelbar aus den Kohlehydraten gebildet wird, sobald wir also diese Voraussetzung annehmen, welche wir der Theorie der Fettbildung in der Leber zu Grunde legten.

Mit dieser Auffassung stimmt auch jene Thatsache überein, welche von Mehreren aufgefunden und constatiert worden, dass bei Diabetikern nach Aufnahme von Kohlehydraten der Werth des Respirationscoëfficienten nicht grösser wird, was in gesundem Zustande immer eintritt, wie ich dies zu Beginn dieser Zeilen zu bemerken hatte.

Bei Diabetikern nimmt nämlich, nach Einnehmen von Kohlehydraten, die Kohlensäureausscheidung nicht zu, was den Beweis liefert, dass sich beim Diabetiker aus dem Zucker kein Fett bildet.

Ich kann mich an dieser Stelle nicht in eine eingehende Erörterung einlassen, inwiefern diese neue Auffassung mit den bisher aufgestellten Theorien über das Wesen der Diabetik übereinstimmt oder hiervon abweicht; ich will nur noch einmal betonen, was ich schon vor dem bemerkt habe, dass vor der Hand die theoretische Möglichkeit nicht ausgeschlossen werden kann, nach welcher auch in anderen Organen und Zellen eine ähnliche Fettbildung vorkommen könne, und so die Störung der Fettbildung in anderen Organen die Ursache der Hyperglycaemie werden könne.

Nachdem aber alle Daten dahin weisen, dass die Leber das Hauptorgan ist, welches aus den Kohlehydraten Fett bildet, so müssen wir vor allem die Functionsstörung dieser als die Ursache der Hyperglycaemie betrachten.

Es versteht sich von selbst, dass, indem wir auf Grund der Fettbildung in der Leber den Ursprung der Hyperglycaemie mit der Functionsstörung der Leber in Verbindung bringen, diese

gestörte Function derselben nur als die unmittelbare Ursache betrachten, welche selbst wieder von den im Organismus vorkommenden vielfachen anderen Ursachen abhängen kann.

Die Umgestaltung, welche die Lehre von der Fettbildung in der Leber, sowohl in den Auffassungen der Physiologie als auch der Pathologie hervorbringt, eröffnet den experimentellen Untersuchungen ein weites Feld und eine neue Richtung; die Resultate meiner, in dieser Richtung fortgesetzten Versuche, werde ich mir seiner Zeit gestatten der geehrten Akademie vorzulegen.

15.

SECUNDÄRE KATHODENSTRAHLEN.

Von ALOIS SCHULLER.

O. ö. Prof. der Physik an dem Königl. ungar. Polytechnikum zu Budapest, ord. Mitglied der ungar. Akademie der Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der Akademie den 18. Juni 1900.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Math. u. Naturwiss. Anzeiger der Akademie, Bd. XVIII, p. 257—267, 1900).

Der Zweck dieser Zeilen ist, einiges Licht auf das Wesen jener Kathodenstrahlen zu werfen, welche aus dem sogenannten LENARD'schen Fenster austreten.

Hr. LENARD hat in einer äusserst werthvollen Abhandlung* nachgewiesen, dass aus einer, von Kathodenstrahlen getroffenen, möglichst dünnen Aluminium-Folie Kathodenstrahlen in allen Richtungen und namentlich auch von der Rückseite derselben austreten. LENARD selbst betrachtet die Kathodenstrahlen als Vorgänge im Aether und ist der Ansicht, die von der Rückseite der Aluminium-Lamelle kommenden Strahlen seien durch die Aluminiumschicht gegangen. Dem gegenüber meinen andere Forscher, die Kathodenstrahlen entstünden aus der Bewegung materieller Theilchen und wären nicht im Stande, durch feste Körper zu dringen; diese fassen die dem Fenster entstammenden Kathodenstrahlen als solche auf, welche in der Aluminium-Oberfläche entstehen.** Neuere Erfahrungen, sowie auch die zu beschreibenden secundären Kathodenstrahlen scheinen die letztere Auffassung zu begünstigen.

---

* LENARD, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894.

** G. G. STOKES, Manchester Memoirs 41. Part IV. 1896/97. 26 p.

Die secundären Kathodenstrahlen, von denen hier die Rede ist, entstehen in folgender Weise.

Die primären Kathodenstrahlen entstammen der Kathode K (Fig. 1) und fallen auf das isolierte oder zur Erde abgeleitete Metallblech a, gerade so, wie in den zur Erzeugung der Röntgenstrahlen gebräuchlichen Focus-Lampen, nur dass die Antikathode a nicht mit der Anode A verbunden ist. Solange die Verdünnung

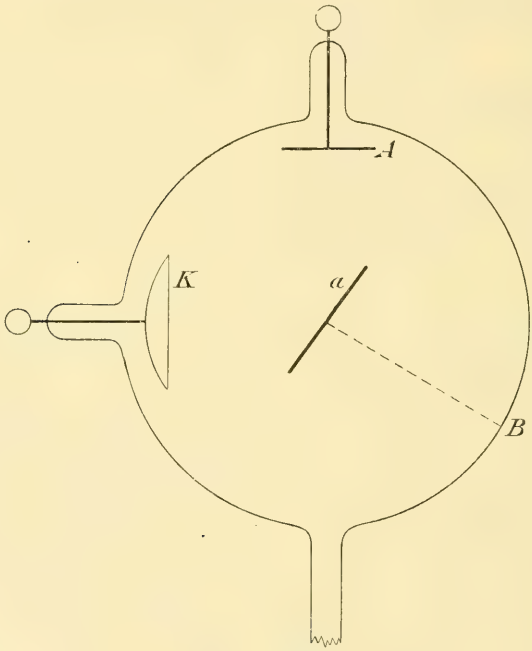


Fig. 1.

nicht genug vorgeschritten ist, überwiegt das Fluorescenz-Licht der primären Kathodenstrahlen derart, dass ausser den bekannten Erscheinungen nichts zu bemerken ist, sobald aber die Funkenstrecke zwischen Anode und Kathode in Luft 2—3 cm überschreitet, gewahrt man hinter der Antikathode auf der Glasoberfläche neu auftretendes Fluorescenz-Licht, welches mitunter, bei geeigneter Form der Antikathode scharfe Grenzen zeigt und dann besonders auffallend ist. Man überzeugt sich

leicht davon, dass dieses Fluorescenz-Licht von regelmässigen Kathodenstrahlen herrührt, die aber nicht von der Kathode, sondern von der Antikathode ausgehen, denn dieselben Formen treten auch dann auf, wenn die Antikathode mit der Kathode leitend verbunden wird, nur ist das Licht im letzteren Falle intensiver.

Zur Fixierung der in Rede stehenden Formen, die mit der Form der Antikathode stark wechseln, empfiehlt sich der folgende Weg. Man verbinde vorerst die Antikathode mit der Anode, wie bei den Röntgen-Lampen. In diesem Falle zeigt das Fluorescenz-Licht, welches beim Thüringer Glase grün ist, seine einfachste Form, wovon uns gegenwärtig nur der wesentlich verkleinerte Schatten der Antikathode interessiert, offenbar eine Folge der elektrostatischen Anziehung, welche die positiv geladene Antikathode auf die streifend vorüberschiessenden Kathodenstrahlen ausübt. Alsdann schalten wir die Kathode gänzlich aus und verbinden die Antikathode *a* mit dem negativen Pole der Maschine; dabei übernimmt die Antikathode die Rolle der Kathode und es erscheinen auf der von *K* abgewendeten Seite jene Formen, die den Gegenstand unserer Aufmerksamkeit bilden sollen. Die auf der entgegengesetzten Seite auftretenden Kathodenstrahlen erleiden bei der folgenden Schaltung wesentliche Verschiebungen. Verbinden wir nun Kathode und Antikathode, so bleiben einige der Formen, namentlich auf der von der Kathode abgewendeten Seite in der Umgebung von *B*, bestehen, und diese sind es, welche wir auch dann beobachten, wenn die Antikathode isoliert oder mit der Erde leitend verbunden ist. Dreht man die Antikathode, so bewegen sich diese Formen in demselben Sinne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit. — Bei grösserer Schlagweite (10 bis 12 cm in Luft) begünstigt die Ableitung zur Erde die Bildung der secundären Kathodenstrahlen.

Zur Erzeugung der secundären Kathodenstrahlen kann die Antikathode aus verschiedenen Metallen (*Al*, *Pt*, *Cu* u. s. w.) bestehen; auch fertige Röntgen-Lampen liefern dieselben, falls man die Antikathode nicht mit der Anode verbindet. Flächen von einigen Quadratcentimeter Ausdehnung erweisen sich wirksamer als kleine, und besonders geeignet sind diejenigen Formen der

Antikathode, welche als selbstständige Kathode wirkend (zweite Schaltung) scharf begrenzte Lichterscheinungen liefern.

Die secundären Kathodenstrahlen unterliegen den magnetischen Kräften und haben auch sonst dieselben Eigenschaften, wie primäre Kathodenstrahlen.

Jedesmal, so oft die Antikathode diese secundären Kathodenstrahlen, welche ich zur Unterscheidung von den, aus dem LENARD'schen Fenster stammenden divergenten Strahlen als regelmässige Kathodenstrahlen bezeichnen will, aussendet, ist der Schatten der Antikathode, den die primären Kathodenstrahlen entwerfen, bedeutend grösser, als einer leuchtenden Kathode entsprechen würde. Die an der Antikathode vorüberziehenden Kathodenstrahlen sind offenbar abgelenkt, und zwar in dem Sinne, wie es einer negativen Ladung der Antikathode entsprechen würde, ebenso bei isolierter, wie auch bei einer mit der Erde leitend verbundenen Antikathode. Der Schatten der Antikathode ist immer scharf begrenzt, aber mehr oder weniger verzerrt, wohl eine Folge der ungleichen Vertheilung der ablenkenden Elektricität. Man bemerkt gewöhnlich einen doppelten oder mehrfachen Schatten, ähnlich der von GEITLER* beschriebenen Erscheinung, und zwar zeigt sich der mehrfache Schatten auch dann, wenn als Elektricitäts-Quelle eine vielplattige Influenz-Maschine dient.

Die Existenz der hier beschriebenen secundären Kathodenstrahlen giebt zu einigen wichtigen Folgerungen Anlass. Vor allem gewinnt dadurch jene Ansicht über das Wesen der Röntgenstrahlen, welche ich vor einigen Jahren veröffentlicht habe**, eine wesentliche Stütze. Den Ausgangspunkt meiner hierauf bezüglichen Mittheilung bildet die Annahme äusserst rascher Ladungen der Antikathode, die in so kurzer Zeit erfolgen, dass sie sich selbst in guten Leitern der Elektricität anfangs nur auf die von den Kathodenstrahlen getroffenen Stellen beschränken, dass also die Zeit zur Ableitung der Elektricität nicht ausreicht. Die Existenz derartiger Ladungen wird durch die secundären Kathoden-

---

* Wied. Ann. 65. p. 123. 1898.

** Zur Deutung der Röntgenstrahlen. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn 14. p. 63. 1898.

strahlen sozusagen über allen Zweifel erhoben, wie könnten sonst Kathodenstrahlen von der Antikathode ausgehen? Den Ladungen muss ein so bedeutendes Potential entsprechen, dass dadurch Kathodenstrahlen erzeugt werden können, und von besonderer Wichtigkeit ist, dass die Ladungen auch dann noch auftreten, wenn die Antikathode zur Erde abgeleitet ist.

Noch wichtiger dürfte sein, dass die secundären Kathodenstrahlen auf das Wesen der vom LENARD'schen Fenster austretenden Kathodenstrahlen schliessen lassen. Wenn es nämlich wahr ist, dass eine zur Erde abgeleitete Antikathode, als welche auch ein LENARD'sches Aluminium-Fenster zu betrachten ist, unter dem Einflusse auffallender Kathodenstrahlen eine Quelle neuer Kathodenstrahlen bildet, so gewinnt die Ansicht an Wahrscheinlichkeit, nach welcher die LENARD'schen Kathodenstrahlen nicht durch die Aluminiumlamelle dringen, sondern in der Oberfläche derselben erzeugt werden. Dieser Auffassung stellt sich aber eine bedeutende Schwierigkeit hemmend entgegen. Es ist nämlich fraglich, ob die secundären Kathodenstrahlen, welche, sowie die primären, die Oberfläche den Kraftlinien entsprechend in senkrechter Richtung verlassen, unter demselben Gesichtspunkte zu behandeln sind, wie die aus dem LENARD'schen Fenster tretenden divergenten Strahlen? Meiner Ansicht nach ist dies auf Grund der folgenden Ueberlegung wirklich der Fall.

Die von der Kathode fortgeschleuderten, mit negativer Elektricität beladenen Theilchen treffen die Antikathode nicht gleichzeitig; dies ist unter anderem schon aus der verschiedenen Weglänge zu folgern. Jedes auffallende Theilchen, resp. jede Gruppe von gleichzeitig auf ein Flächenelement treffenden Theilchen entladet sich beim Anprall theilweise und die zurückprallenden Theilchen haben im Augenblicke der Trennung wahrscheinlich dasselbe Potential, wie die berührte Stelle der Antikathode. Die der letzteren mitgetheilte Elektricität pflanzt sich anfangs im Metall in jeder Richtung fort, bis sie die hintere Oberfläche erreicht hat; im weiteren Verlaufe geschieht die Fortpflanzung nur in den in der Metallmasse möglichen Richtungen, wahrscheinlich hauptsächlich in der Nähe der Oberfläche. Hält man ein einzelnes auffallendes Theilchen, resp. eine Gruppe auf ein Flächenelement b

(Fig. 2) gleichzeitig anprallender Theilchen vor Augen, so ist klar, dass auf der Rückseite des Metalles das höchste Potential in demjenigen Punkte, der am nächsten zu b liegt, resp. auf derjenigen Fläche q auftreten wird, auf der die Elektricität als gleichzeitig eintreffend betrachtet werden kann. An diesen Stellen kann das Potential den zur Bildung von Kathodenstrahlen erforderlichen Werth am ehesten erreichen. Die Fläche q ist nun umso kleiner, je dünner die Schicht ist, so dass bei sehr geringer Dicke die von der Rückseite ausgesandten Kathodenstrahlen gleichsam von einem Punkte ausgehen, daher nothwendig divergent sein werden. Dasselbe gilt für jeden Punkt der Antikathode, auf den Kathodenstrahlen fallen. Die so entstehenden divergenten Kathodenstrahlen verhindern naturgemäss die Anhäufung der Ladung, wodurch die Entwickelung der regelmässigen, auf die Oberfläche senkrechten Kathodenstrahlen beeinträchtigt oder unmöglich gemacht wird. Dieser Vorgang ist bei dicken Antikathoden ausgeschlossen; denn einestheils sind die Ladungen auf der Rückseite der Platte, die von den einzelnen anprallenden Punkten herrühren, infolge der grösseren Vertheilung der Elektricität viel geringer, andererseits sind die Flächen grössten Potentials (q) nicht mehr als Punkte zu betrachten, daher können die secundären Kathodenstrahlen nicht divergent sein, sondern sie müssen sich wie regelmässige verhalten. Inzwischen ist natürlich eine Dicke vorauszusehen, bei der gewisse einfallende Kathodenstrahlen gemischte secundäre Kathodenstrahlen hervorrufen, so dass zwar alle Richtungen vertreten sind, aber die Intensität in der Richtung der regelmässigen Kathodenstrahlen überwiegt. Möglich, dass dieser Fall auch bei dem LENARD'schen Fenster auftritt, quantitative Messungen dürften aber nicht leicht anzustellen sein, da die einfallenden Kathodenstrahlen die Aluminiumfolie bei der erforderlichen geringen Dicke (ca. 0,003 mm) sehr leicht beschädigen.

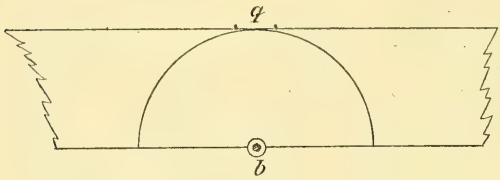


Fig. 2.

Das bisher Entwickelte bezieht sich auf Erscheinungen im Vacuum und lässt sich nach meiner Meinung nicht auf die vom LENARD'schen Fenster in den lufterfüllten Raum tretenden Strahlen ausdehnen. Denn wenn die Kathodenstrahlen wirklich in Bewegung befindliche materielle Theilchen sind, wenn dieselben also nicht als Vorgang im Aether aufzufassen sind, so können in gewöhnlicher Luft Kathodenstrahlen von namhafter Länge ebensowenig gedacht werden, wie in tropfbar-flüssigen oder festen Körpern; denn in der Luft würden Kathodenstrahlen schon auf kurzen Strecken mit so vielen materiellen Theilchen zusammentreffen, dass ihre ungehinderte Ausbreitung ausgeschlossen erscheint. Meiner Ansicht nach hätte man also die aus dem LENARD'schen Fenster in die Luft tretende sog. Strahlung als eine von den Kathodenstrahlen verschiedene Erscheinung aufzufassen. Und wirklich pflanzen sich die LENARD'schen Strahlen in Luft nicht einmal annähernd geradlinig fort, die Luft bildet ein trübes Medium.* Die Ablenkbarkeit durch magnetische Kräfte, welche den Kathodenstrahlen eigen ist, konnte hier nicht einmal versucht werden, da ja eigentliche Strahlen in Luft, sowie auch in anderen Gasen unter gewöhnlichem Druck, überhaupt nicht beobachtet werden können.

Nach der hier vertretenen Auffassung ist den Kathodenstrahlen eine strahlenförmige Ausbreitung zuzuschreiben; dieselbe wäre, der Trägheit der Materie entsprechend, genau geradlinig, wenn elektrische und magnetische Kräfte ausgeschlossen wären. Die Bahn wird aber, von äusseren Kräften abgesehen, durch die Ladungen der bewegten Theilchen, von welchen die Kathodenstrahlen nicht befreit werden können, ein wenig modificiert, indem dadurch elektrische und magnetische Kräfte auftreten. Die Kathodenstrahlen werden vielleicht am präcisesten dadurch charakterisiert, dass der Transport der Elektricität durch Massenbewegung elektrostatischen Ursprunges, nicht durch Leitung erfolgt. Dringen Kathodenstrahlen in Gase von gewöhnlichem Druck, so tritt an ihre Stelle eine anders geartete Entladung, bei der die Elektricität nicht bloss durch die Bewegung materieller Theilchen, sondern

* LENARD, Wied. Ann. 51. p. 235. 1894.

vorwiegend durch den Austausch zwischen benachbarten Körpertheilen, also durch Leitung, befördert wird, ähnlich wie es wahrscheinlich im sogenannten positiven Licht der GEISSLER'schen Röhren der Fall ist. Ich meine, dass man da nicht mehr von Kathodenstrahlen sprechen kann, dass man also diese Bezeichnung auf die strahlenförmige Ausbreitung beschränken sollte. Dasselbe gilt von der Ausbreitung des Lichtes in trüben Medien, wo die Bezeichnung als Strahlen ebenfalls nicht zutreffen würde.

Unsere Auffassung giebt auch darüber Aufschluss, weshalb von den durch Kathodenstrahlen getroffenen Gefässwänden immer divergente Kathodenstrahlen ausgehen. Die anprallenden negativelektrischen Theilchen der Kathodenstrahlen verursachen auf den getroffenen Stellen des Glases locale Ladungen, welche sich wegen der geringen Leitfähigkeit und der kurzen Ladungszeit auf sehr kleine Flächen beschränken, die resultierenden Kathodenstrahlen werden sich also gerade so nach allen Richtungen ausbreiten, als wenn die Entladung aus einzelnen Spitzen erfolgen würde. Das auffallende, die Ladung bewirkende Theilchen selbst dürfte dabei dem regelmässigen Reflexions-Gesetz gehorchen, welches durch die elektrischen Kräfte wohl nur wenig verändert wird, während die materiellen Bestandtheile der übrigen Kathodenstrahlen von dem auf der Glasoberfläche condensierten Gase geliefert werden. Ein Theil der auffallenden Elektricität bleibt wohl am Glase haften, der Rest vertheilt sich auf eine grössere Zahl materieller Theilchen, daher muss die Geschwindigkeit der divergent reflectierten Kathodenstrahlen wesentlich geringer sein, als die der einfallenden. Aus alledem ist zu schliessen, dass es zur Erklärung der divergent reflectierten Kathodenstrahlen nicht nothwendig ist, die Glasoberfläche als rauh zu betrachten, dass sich vielmehr auch eine vollkommen glatte Oberfläche wie eine vollkommen rauhe verhalten müsse.

Die Existenz der von der Glasoberfläche sich lostrennenden, die divergenten Kathodenstrahlen liefernden Gasschichten folgt unter anderem daraus, dass nach dem Erhitzen des Glases die Entladungen leichter erfolgen, und dass die Luftpumpe mehr Gas befördert, als vorher. Es sei hier gelegentlich bemerkt, dass von Kathodenstrahlen vorher getroffenes Glas schwach leuchtet, während

es durch Erwärmung das kondensierte Gas abgiebt. Diese Art der Thermoluminescenz kann, wie es scheint, beliebig lange nach der Einwirkung der Kathodenstrahlen erhalten werden und zwar auch dann noch, wenn das Entladungsrohr schon mit Luft gefüllt ist. Die Luminescenz zeigt sich aber nach jedem Gebrauch nur einmal, erhitzt man nämlich stark genug, so hört das Leuchten auf und wiederholt sich erst, nachdem Kathodenstrahlen von neuem eingewirkt haben. Die Beachtung dieses schwachen Leuchtens erleichtert die Regenerierung zu hart gewordener Röntgen-Lampen wesentlich. Man erhitzt zu dem Zwecke einen Theil der Lampe im Finstern, bis er schwach zu leuchten beginnt. Erhitzt man zu stark, so kann sich der Gasdruck so weit steigern, dass kaum mehr Röntgenstrahlen entstehen; in diesem Falle bessert sich, wie bekannt ist, die Lampe während des Gebrauches, es können die Entladungen mit der Zeit sogar ganz ausbleiben, sodass erneuertes Erhitzen nothwendig wird.

Bei dieser Gelegenheit sei noch bemerkt, dass nach meinen Erfahrungen die Fähigkeit der Kathode, Gase abzugeben, wahrscheinlich in engem Zusammenhange mit der Bildung von Kathodenstrahlen und überhaupt mit dem Zustandekommen von Entladungen steht. Darauf deutet unter anderem, dass in einer möglichst evacuierten Röhre, in der die Entladungen in Folge von anhaltendem Gebrauche ausbleiben, in der also der Widerstand des Gases scheinbar sehr gross ist, bei Umkehrung der Strom-Richtung die Entladungen sofort und zwar bei verhältnissmässig geringer Schlagweite wieder einsetzen. Es hat den Anschein, als würde die Kathode während des Gebrauches jenen Gasvorrath verlieren, der zur Bildung der Entladung erforderlich ist. Eine ähnliche Veränderung, Emission und Absorption von Gasen, mag auch die Wanderung des geschichteten Lichtes in GEISSLER'schen Röhren verursachen. Auf die Bildung der Kathodenstrahlen üben auch andere Umstände einen Einfluss aus, besonders elektrostatische Ladungen der Gefässwände und wahrscheinlich auch die Beschaffenheit des Gases, ob chemische Verbindung oder Gemisch der Bestandtheile, deshalb konnte ich den Einfluss der Gashülle bisher nicht ausser Zweifel setzen.

Würde es gelingen, den Einfluss der Gasentwicklung auf das

Zustandekommen der Kathodenstrahlen unzweifelhaft festzusetzen, so würde die von Hr. LENARD angegebene Thatsache, dass aus dem Fenster Kathodenstrahlen ausgehen, während mit dem Inductor unmittelbar verbundene Elektroden keinen Strom durchgehen lassen, sofort verständlich werden; auf der Oberfläche des Fensters findet sich eben noch die erforderliche Gasschicht, oder die Verbindung, deren Zersetzung Gas zu liefern im Stande ist, während die längere Zeit hindurch gebrauchte Kathode ihres Gasvorrathes schon beraubt ist.

Aus dem Vorerwähnten kann man schliessen, dass das Aussetzen der Entladungen im Vacuum keinen Beweis dafür liefert, dass nicht genügend Materie vorhanden wäre, sondern anderen Einflüssen zuzuschreiben ist. Zur weiteren Unterstützung dieser Folgerung seien noch die beiden folgenden Umstände erwähnt.

Verwendet man im Apparat (Fig. 1) eine bewegliche Antikathode, nämlich ein auf einem Drahte lose hängendes Blech und wird die Verdünnung so weit gesteigert, dass die Entladungen scheinbar ausbleiben, so bemerkt man auf den Gefässwandungen einzelne intensive Lichtflecken und zugleich vollführt die bewegliche Antikathode heftige Bewegungen. Diese, auch schon von Anderen beobachteten Erscheinungen zeigen, dass in dem Gefässe doch noch irgend eine elektrische Veränderung, eine Art Entladung erfolgt. Es gelang mir überhaupt nicht, ein so vollkommenes Vacuum herzustellen, bei welchem keinerlei Anzeichen einer Entladung aufgetreten wären.

Der andere zu erwähnende Umstand besteht darin, dass in einer Röhre, in der zwischen den Elektroden keine regelmässigen Entladungen mehr erfolgen, der ganze innere Raum aufleuchtet, wenn ein Funken-Inductor in der Nähe in Thätigkeit gesetzt wird. Der Gasinhalt ist also nicht so gering, dass von Lichterscheinungen begleitete Entladungen nicht zu Stande kommen könnten. Das Aussetzen der regelmässigen Entladungen zwischen den Elektroden erfolgt, wie bekannt, auch dann, wenn man das Vacuum mit einer Quecksilberluftpumpe in der Sommerhitze erzeugt. In diesem Falle übt der Quecksilberdampf im Vacuum einen verhältnissmässig bedeutenden, einer Quecksilbersäule von wenigstens 0,001 mm entsprechenden Druck aus, es kann also gewiss nicht

behauptet werden, der Mangel an Materie verhindere die Entladungen.

Diese Betrachtungen gestatten noch einen wichtigen Schluss. Wenn nämlich in den möglichst vollkommen evacuierten Gefässen die Menge der zurückgebliebenen Gase zu elektrischen Entladungen und damit verknüpfter Lichtausstrahlung ausreicht, so ist wohl kaum zu bezweifeln, dieselbe Gasmenge könne auch die Fortpflanzung des Lichtes vermitteln. Giebt man dies zu, so entfällt eine der wesentlichsten Stützen der Aethertheorie, nämlich die, dass sich das Licht im materielosen leeren Raume fortpflanzen könne. Da unsere Erfahrungen keinen Anhalt für die letztere Behauptung bieten, so erscheint die Annahme des Aethers als eines von der Materie trennbaren Mediums unbegründet. Derzeit kann nur von einem mit der Materie untrennbar verbundenen Aether die Rede sein, ein solcher bedeutet aber nichts weiter, als gewisse Eigenschaften der bekannten Stoffe.

Anmerkung. Ohne die Frage der Aetherhypothese erschöpfen zu wollen, möchte ich noch das Folgende erwähnen.

Zur Begründung der Aetherhypothese werden u. a. die Querschwingungen des Lichtes herangezogen. Von der Vorstellung elastischer Schwingungen ausgehend stellt man das Dogma auf, dass in Gasen transversale Schwingungen ausgeschlossen seien, daher das Medium der Schwingungen ein anderes sein müsse, welches man Aether nennt. Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass diese Schlussweise ihre Grundlage verliert, sobald man sich auf den Boden der elektromagnetischen Lichttheorie stellt. Es dürfte nämlich von vornherein nicht ausgeschlossen sein, dass sich in den materiellen Partikelchen vollziehende elektrische Schwingungen als transversale fortpflanzen können. Aber auch vom Standpunkte der Elasticitäts-Theorie des Lichtes kann man die Richtigkeit des obigen Dogmas bezweifeln. Es ist nämlich bekannt, dass sich jeder Körper um so elastischer erweist, je rascheren Schwingungen er unterworfen wird. Körper, die bei langsamen Impulsen keine Spur einer Elasticität aufweisen, sondern in fortschreitende Bewegung gerathen, erweisen sich in Bezug auf hohe Töne als sehr vollkommen elastisch. Ist es da, angesichts des enormen Sprunges von akustischen zu Lichtschwingungen, nicht denkbar, dass sich die gewöhnlichen Stoffe, namentlich auch die Gase, den Lichtschwingungen gegenüber schon als vollkommen elastische feste Körper erweisen? Man könnte dieser Auffassung die unvollkommene Elasticität der bekannten Stoffe entgegenhalten; doch auch dieser Einwand ist leicht zu beseitigen. Denn elastische Nachwirkungen treten nur bei festen Körpern auf, deren Theilchen gegen einander sehr wenig beweglich sind und auch da nur,

wenn einzelne Theile in Richtung der Scheerungsfestigkeit zu stark in Anspruch genommen sind. Handelt es sich dagegen um kleine Formveränderungen, bei welchen benachbarte Körpertheile nicht bleibend von einander losgerissen werden, oder beschränkt man sich auf reine Volumänderungen, so erweisen sich alle Stoffe als vollkommen elastisch. Besonders augenfällig ist dies bei Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, deren Volumen bekanntlich bloss vom jeweiligen Zustande, nicht von der Vorgeschichte, abhängt.

Zieht man alles dies in Betracht, so scheint die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die dem Aether zugeschriebenen Eigenschaften den bekannten Stoffen selbst zukommen.

16.

THERMOELEKTROMOTORISCHE KRAFT EINIGER METALLOXYDE UND SULFIDE IN VERBINDUNG MIT EINANDER UND MIT EINFACHEN METALLEN BEI 100° TEMPERATURUNTERSCHIED DER BERÜHRUNGSSTELLEN.

Von Dr. ANTON ABT,
Professor an der Universität zu Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 18. December 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö" (Math. und Naturwiss. Anzeiger, Band XVIII, p. 25—43).

I. Theil. Litteratur.

Schon Seebeck, der Erfinder der Thermoelektricität, hat seine grundlegenden Versuche* nicht nur auf die Metalle, sondern auch auf deren Legierungen und auf einige Erze ausgedehnt. Durch diese wurden die Bedingungen der Thermoelektricität festgestellt, nämlich Temperaturdifferenz an den Berührungsstellen und metallische Berührung, die beim Zusammenlöthen am vollkommensten ist. Auch ergab sich daraus, dass mit der Temperaturdifferenz die elektromotorische Kraft oder, wie er sich ausdrückte, die magnetische Spannung der sich berührenden Metalle zunimmt, so z. B., wenn eines der Metalle bis zum flüssigen Zustand erwärmt wird, wobei nach seinen Beobachtungen die magnetische Polarität dieselbe bleibe, wie bei geringerem Temperaturunterschiede des Thermoelementes, und nur die magnetische Spannung

* „Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz." Denkschrift der Königl. Acad. 1822 u. 1823. — Ann. der Phys. u. Chem. Bd. VI. p. 1, 133 u. 253.

zunimmt. Er hatte also die Umkehrung des thermoelektrischen Stromes bei einer bestimmten höheren Temperatur, wie es scheint, nicht beobachtet.

Zugleich hatte SEEBECK die magnetische Reihe der von ihm untersuchten Körper festgestellt, von der er behauptete, dass die Glieder dieser Reihe den Gesetzen der VOLTA'schen Spannungsreihe nicht folgen, dass aber die magnetische Polarisation einer aus mehreren gleichen Thermoelementen bestehenden Thermosäule unter gleichen Verhältnissen ebenso die eines Thermoelementes übertrifft, wie die Polarisation einer VOLTA'schen Säule die eines einzelnen galvanischen Elementes übertrifft.

Ferner beobachtete er, dass die Stellung der Metalle in der magnetischen Spannungsreihe mit der Temperatur, namentlich bei höheren Temperaturen, eine Verschiebung erleide; dass in einer Leitung aus demselben Metalle durch Temperaturdifferenz elektrische Strömung erzeugt wird; und schliesslich, dass der thermoelektrische Strom zu Beginn der Erwärmung der einen Berührungsstelle am stärksten war, dann aber schnell abnahm, sowie die Wärme sich durch Leitung in dem Thermoelemente fortpflanzte.

Bei seinen Versuchen hatte SEEBECK die durch Temperaturdifferenz erzeugte magnetische Spannung durch die in Graden ausgedrückte Ablenkung einer Declinationsnadel bestimmt, ohne die Intensität des thermoelektrischen Stromes durch eine bestimmte Einheit auszudrücken. Schon aus diesem Grunde und wegen der geringen Empfindlichkeit seiner Messmethode konnte seine magnetische Reihe den Gesetzen der Spannungsreihe nicht folgen.

Genaue Intensitätsmessungen thermoelektrischer Ströme hatte zuerst BECQUEREL* im Jahre 1826 ausgeführt. Die eine Löthstelle eines Kupfereisenelementes wurde mit schmelzendem Eis umgeben, während die andere in eine Glasröhre eingeschmolzen in Quecksilber tauchte, dessen Temperatur mit einer Spirituslampe allmählich erhöht und von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Graden die Ablenkung der Galvanometernadel beobachtet. Das

* Seine diesbezüglichen Untersuchungen hatte er am 13. März 1826 der Pariser Akad. der Wiss. vorgelegt. Compt. rend. — Ann. de chim. et de phys. tome XXXI, p. 371, 1826 und tome XLI, p. 353, 1829.

von ihm benutzte Galvanometer war mit einem astatischen Nadelsystem versehen. Die Graduierung des Instrumentes behufs Intensitätsmessungen der thermoelektrischen Ströme hatte er durch Versuche nach dem Principe ausgeführt, dass zwei, drei oder vier Stromkreise von demselben Durchmesser bei gleichbleibender Stromstärke eine zwei-, drei- oder viermal grössere Wirkung erzeugen, als ein Stromkreis, dass also die beobachteten Ablenkungen der Zahl der Stromkreise proportionalen Stromintensitäten entsprechen. Als constante Ströme, die bei diesen Messungen nothwendig waren, benutzte er die SEEBECK'schen Thermoströme.

Durch diese Versuche hatte er dargethan, dass die elektromotorische Kraft (la force électro-dynamique) der Thermoelemente bis zu einer gewissen Grenze der Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen nahezu proportional zunimmt. So z. B. bei *Cu-Fe* von 0° bis 140°, bei *Cu-Ag* von 0° bis 160°. Dabei entging ihm nicht die wichtige Thatsache, dass bei Eisen in Berührung mit einem anderen Metalle die Stromrichtung bei einer gewissen Temperatur ihr Vorzeichen ändert. Zu dieser Beobachtung sagt er: „Et peut-être le fer n'est-il pas le seul métal qui jouisse de cette propriété." Die von ihm aufgestellte thermoelektrische Reihe ist:

— Bismuth	Blei	Silber	Eisen	
Platin	Zinn	Kupfer	Antimon	
Quecksilber	Gold	Zink		+

Schon SEEBECK hatte folgende Reihe aufgestellt:

Bismuth	Titan	Chrom	Kupfer No. 3 (Cäment Cu.)
Nickel	Messing No. 1	Molybdän	Wolfram
Kobalt	Gold No. 1 (Ung. Goldm.)	Kupfer No. 2 (aus dem Handel)	Cadmium
Palladium	Kupfer No. 1 (aus dem Handel)	Rhodium	Stahl
Platin	Messing No. 2	Iridium	Eisen (best. geschm.)
Uran	Quecksilber (reinstes)	Gold No. 2	Arsenik
Kupfer No. 0 (rein)	Blei	Silber	Antimon
Mangan	Zinn	Zink	Tellur

Wie sehr die Stellung einzelner Metalle in der thermoelektrischen Reihe bei höheren Temperaturen sich ändert, ergab sich aus folgender Reihe von SEEBECK:

Bismuth	Stahl	Kupfer No. 2
Nickel-Legierung	Stabeisen	Gold No. 2
Palladium	Messing No. 1	Zink
Platin	Kupfer No. 0	Silber
Blei	Kupfer No. 1	Antimon
Zinn	Gold No. 1	

Aus dieser Verschiebung einzelner Glieder in der thermoelektrischen Reihe bei hohen Temperaturen folgt auch die Umkehrung des Stromes für die betreffenden Metalle, nur hatte er die Temperaturdifferenz, bei welcher die Umkehrung stattfindet, nicht beobachtet. Diese Beobachtungen wurden erst später durch andere ausgeführt.

Bei einem Thermoelemente aus Zink und einer Legierung aus 3 Theilen Kupfer und 1 Theil Antimon beobachtete er bei andauernder Erhitzung der Berührungsstelle die Umkehrung der Polarität noch unter dem Schmelzpunkte (360°) des Zinkes, während dieselbe Legierung in Berührung mit Kupfer selbst bei hohen Temperaturen keine Umkehrung der Polarität zeigte.

Bemerkenswerth ist ferner, dass BECQUEREL geeignete Thermoelemente zur Bestimmung hoher Temperaturen verwendete, wobei er von der Voraussetzung ausging, dass die elektromotorische Kraft des Elementes mit der Temperatur proportional zunimmt, was freilich nur annähernd der Fall ist. So fand er bei der Flamme einer Spirituslampe die Temperaturen in dem oberen blauen Theile, dann in dem weissen leuchtenden und in dem dunkeln inneren Theile derselben 1350°, 1080°, 780°.

Eine grosse Zahl eingehender Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten der Metalle, Erze und Krystalle hat HANKEL ausgeführt. Schon in seiner 1844 veröffentlichten Arbeit hatte er für geringe Temperaturunterschiede von nicht weniger als 75 Körpern deren Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe bestimmt.

Nachdem er seine Untersuchungen auch bei höheren, bis zur

Glühhitze gesteigerten Temperaturen ausführte, machte er ebenfalls die Erfahrung, dass die untersuchten Metalle und Erze ihre gegenseitige Stellung in der thermoelektrischen Reihe ändern, wie dies aus folgender Tabelle ersichtlich ist.

Bei geringer Temperatur-differenz	Bei hoher Temperatur-differenz	Bei geringer Temperatur-differenz	Bei hoher Temperatur-differenz
—	—	—	—
Bismuth	Bismuth	Kupfer No. 1	Platin No. 2
Neusilber	Kobalt	(Draht)	Silber (12löthig)
Nickel (dicht)	Neusilber	Silber (12löthig)	Eisen
Kobalt	Platin No. 1	Platin No. 2	Kupfer No. 1
Platin No. 1	Nickel (dicht)	Zink	Silber No. 2
(Lamelle)	Arsennickel	Silber No. 2	Kupfer (galv.)
Gold	Messing	Silber No. 1	Silber No. 1
Messing	Gold	Kupfer (galv.)	Zink*
Arsennickel	Zinn	Cadmium	Cadmium
Kupfer No. 2	Blei	Eisen	Antimon
Zinn	Kupfer No. 2	Antimon	+
Blei		+	

Aus seinen Versuchsergebnissen leitete HANKEL folgendes Gesetz ab: „Wenn bei einem Metalle dieser Reihe bezüglich eines andern eine Stromumkehrung stattfindet, so muss dies auch der Fall sein bei allen dazwischen liegenden Metallen bezüglich des einen oder des andern der beiden Metalle.“ So fand er z. B. für Eisen und Kupfer No. 1, dass in Berührung mit Eisen Stromumkehrung stattfindet bei Zink, Silber No. 1 u. 2, galvanischem Kupfer und bei Cadmium; in Berührung mit Kupfer No. 1 hingegen bei 12löth. Silber und bei Platin. Ferner folgerte er aus diesen Beobachtungen den wichtigen Satz, dass die Stromstärke eines Thermoelementes zweier Metalle aus der obigen Reihe gleich ist der Summe der Stromstärken der Thermoelemente aus den dazwischen liegenden Metallen.

Numerische Bestimmungen über die elektromotorische Kraft der Thermoelemente bei verschiedenen Temperaturdifferenzen veröffentlichte er in einer zweiten noch in demselben Jahre erschienenen Arbeit. Bei diesen Bestimmungen wurden die Metalle

* Bei einem Zink- und Silberelement findet die Umkehrung des Stromes schon bei relativ geringer Temperatur statt.

in Draht- oder Bandform verwendet, die nicht dehnbaren in Stangenform gegossen, und die Löthstelle in einer Éprouvette im Sandbade mittels Spirituslampe erwärmt. Temperaturen bis zu 230° bestimmte er mit einem Thermometer, dessen Scala bis 235° R. reichte. Darüber hinausgehende Temperaturen bis 400° wurden mittels eines Platin-Eisen-Elementes, bei welchem die elektromotorische Kraft bis 130° mit der Temperatur proportional zunahm, unter der Voraussetzung der Proportionalität bis 400° durch Rechnung bestimmt.

Zur Messung der thermoelektrischen Ströme verwendete er eine Sinusbussole mit einer aus 6—7 Windungen eines breiten Kupferbandes bestehenden Multiplicatorrolle von geringem Widerstande. Innerhalb dieser befand sich eine an einem Seidenfaden aufgehängte leichte Magnetnadel. Aus der dem Sinus des beobachteten Ablenkungswinkels proportionalen Stromintensität und dem Widerstande des Thermoelementes wurde die elektromotorische Kraft berechnet.

Die Bedeutung der HANKEL'schen Bestimmungen wird dadurch erhöht, dass sich dieselben auch auf die Maxima der elektromotorischen Kräfte und bei einigen Thermoelementen auch auf die Umkehrung der Stromesrichtung beziehen, wie dies aus folgenden Resultaten ersichtlich ist. Den Maximalwerth der elektromotorischen Kraft erreichte ein Thermoelement

aus	Zink	und	Eisen	bei	143° R.
„	Zinn	„	„	„	167° „
„	Galv. Kupfer	„	„	„	169° „
„	Silber	„	„	„	184° „
„	Kupfer No. 1	„	„	„	195° „
„	Gold	„	„	„	206° „
„	Messing	„	„	„	235° „
„	Blei	„	„	wahrscheinlich bei	235—240° R.

Die Temperaturen, bei welchen die Umkehrung der Stromesrichtung erfolgte, also die elektromotorische Kraft gleich Null war, wurde theils aus directen Beobachtungen, theils graphisch aus den Durchschnittspunkten der thermoelektrischen Curven bestimmt. Diese waren

bei	Zink	und	Silber	155°
„	„	„	Galv. Kupfer	171°
„	Gold	„	Messing	224°
„	Zink	„	Eisen	252°
„	Galv. Kupfer	„	„	270°
„	Silber	„	„	295°
„	Gold	„	Kupfer No. 2	330°
„	Kupfer No. 1	„	Eisen	332°

Genaue Messungen über die Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe hatte auch MATTHIESSEN mit den meisten einfachen Metallen, einigen Legierungen und vielen nicht metallischen Leitern in KIRCHHOFF's Laboratorium ausgeführt. Die Resultate dieser Messungen hatte KIRCHHOFF veröffentlicht*.

In der I. Tabelle dieser Mittheilung sind die nach KIRCHHOFF benannten, nur von der Natur der Metalle abhängigen thermoelektrischen Zahlen der Metalle ausgeführt, wo die des reinen Silbers gleich Null und die des käuflichen Kupfers gleich 1 gesetzt ist. Diese nach den thermoelektrischen Zahlen und ihren Vorzeichen geordnete Reihe enthält 43 verschiedene Körper, darunter 34 einfache Metalle, 4 Legierungen, Gaskohle, rothen Phosphor, Tellur und Selen.

Auf der positiven Seite der Reihe stehen:

Bismuth (käuflich, gepr. Draht)	+ 35,81
„ (rein, „ „)	+ 32,91
Legierung (32 Th. Bism. und 1 Th. Antim.)	+ 29,06
Bismuth (rein, geschm.)	+ 24,96
Bismuthkrystalle (in axialer Richtung) . . .	+ 24,59
„ (in aequat. „) . . .	+ 17,17

In der Mitte der Reihe stehen:

Antimon (rein, gepr. Drath)	+ 0,036
Silber (rein, hart gezogen)	+ 0,000
Gaskohle (aus der Gasfabrik zu Heidelberg) .	— 0,057
Zink (rein, gepr. Dr.)	— 0,208

* Ann. der Phys. u. Chem. Bd. CIII. p. 412, 1858.

Auf der negativen Seite der Reihe stehen:

Rother Phosphor	— 9,600
Antimon (rein, geschm.)	— 9,871
Legierung (12 Th. Bism. und 1 Th. Zinn)	— 13,670
„ (2 Th. Antim. und 1 Th. Zink)	— 22,700
Tellur (rein, geschm.)	— 179,800
Selen (aus d. chem. Laborator. zu Heidelb.)	— 290,000

Bei den Versuchen wurden stets zwei Thermoelemente mit einander verglichen, deren erwärmte und kühl gehaltene Löthstellen auf gleicher Temperatur erhalten wurden, so dass die Temperaturunterschiede der Löthstellen bei beiden Elementen dieselben waren. Die Löthstellen befanden sich in würfelförmigen Gefässen aus Zinkblech, von denen das eine erwärmtes, das andere Wasser von der Lufttemperatur enthielt. Die Berührung der Löthstellen mit dem Wasser wurde durch dünne Kautschukröhren verhütet, worin dieselben eingehüllt waren. Der Zwischenraum der doppelwändigen Gefässe war mit Kohlenpulver ausgefüllt. In dem Stromkreise der beiden Thermoelemente war ein passender Commutator und ein Spiegelgalvanometer eingeschaltet. Die Ablenkung des etwa 1 Pfund schweren Magnetstabes wurde mit Scala und Fernrohr beobachtet.

In den Tabellen II und III sind die Beobachtungsresultate und die abgelesenen Temperaturen zusammengestellt, aus welchen die in Tabelle I angeführten Zahlen bestimmt wurden. Aus diesen Werthen kann das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte zweier Thermoelemente berechnet werden. Die auf diese Weise berechneten Verhältnisszahlen hat MATTHIESSEN mit den aus directen Versuchen erhaltenen Zahlen verglichen und beide gut übereinstimmend gefunden, wie dies aus der Tabelle V ersichtlich ist, aus welcher ich nur einige Fälle hier anführe.

		Beob.	Ber.
Silber, Bismuth (Draht aus d. Handel)	u. Silber, Bismuth	1,088	1,097
„ Kalium	„ „ Palladium	1,542	1,543
„ Blei	„ „ Zinn	1,029	1,027

Auch bei den übrigen Combinationen stimmen die beiden Werthe mit einander gut überein.

1864 wurde von BUNSEN* die elektromotorische Kraft einer einfachen thermoelektrischen Kette aus Kupfer und Buntkupfererz bei hoher Temperatur mit der eines DANIELL'schen Elementes verglichen, wobei die Temperatur der Berührungsstelle mittels einer Gasflamme bis über den Schmelzpunkt des Zinnes gesteigert wurde. Er fand die elektromotorische Kraft des Kupfer-Kupferkies-Elementes bei diesem Temperaturunterschiede 10mal grösser, als die eines Bismuth-Antimon-Elementes bei 100° Temperaturunterschied und gleichem inneren Widerstand. Auch bei einem durch die Flamme eines BUNSEN'schen Brenners erhitzten Elemente aus Platina-Pyrolusit fand er die elektromotorische Kraft so gross, wie die des Kupfer-Kupferkies-Elementes, nämlich gleich $^1/_{10}$ der des DANIELL'schen Elementes.

Auch STEFAN** hat das thermoelektrische Verhalten mehrerer Erze bei hohen Temperaturunterschieden untersucht. Bei diesen Versuchen wurde das Erz auf einen Kupferstreifen gelegt und auf der oberen Seite des Erzes ein Kupferdraht angebracht und diese mit einer Holzklemme an einander gepresst. Ein zweiter Kupferdraht wurde mit dem Kupferstreifen in leitende Berührung gebracht, dann beide Drähte mit einem Galvanometer von grossem Widerstande verbunden und das Ende des Kupferstreifens mit einer Weingeistflamme erhitzt. Zur Herstellung eines Thermoelementes aus zwei verschiedenen Erzen wurde zwischen diesen Stücken ein Kupferstreifen und an den gegenüberliegenden Seiten der Erzstücke Kupferdrähte angebracht, dann diese mittels einer Holzzwinge an einander gepresst. Der Kupferstreifen diente bloss zur Leitung der Wärme bis zu den Berührungsstellen. Die elektromotorische Kraft der so untersuchten 14 Thermoelemente ist in Zahlen angegeben, welche ausdrücken, wie viele dieser Elemente zu einer Kette vereint eine elektromotorische Kraft gleich der eines DANIELL'schen Elementes geben.

Aus diesen Versuchen ergab sich, dass die elektromotorische Kraft zweier Erze je nach Structur und Zusammensetzung sowohl

* Ann. der Phys. u. Chem. Pogg. Bd. CXXIII, p. 505, 1864.

** „Ueber einige Thermoelemente von grosser elektromotorischer Kraft." Anzeiger der Wiener Akad. 1865, No. IX und Ann. der Phys. u. Chem. Bd. CXXIV, p. 632, 1865.

bezüglich der Grösse als des Vorzeichens verschieden sein kann. Den grössten Werth hatte ein Thermoelement aus Bleischweif (zu Galenit gehörig) und Buntkupfererz, von welchen 5,5 zusammen eine elektromotorische Kraft gleich der eines DANIELL'schen Elementes geben, während von den aus bestimmten Legierungen angefertigten MARKUS'schen Elementen eine Säule aus 18 solchen Elementen an elektromotorischer Kraft einem DANIELL'schen Elemente gleichkommt.

Dass die elektromotorische Kraft der Thermoelemente meist nur innerhalb enger Grenzen der Temperaturdifferenz proportional ist, und dass namentlich bei höheren Temperaturen die demselben Temperaturunterschiede entsprechende elektromotorische Kraft bei zunehmender Temperatur abnimmt, dass ferner ein Thermoelement bei einer bestimmten Temperatur den höchsten Werth seiner elektromotorischen Kraft erreicht, welcher dann bei weiterer Zunahme der Temperatur fortwährend bis Null abnimmt, und dann die Richtung des Thermostromes wechselt, ist aus den vielen eingehenden Untersuchungen von GAUGAIN, AVENARIUS, NACCARI und BELLATI, W. THOMSON und TAIT bekannt.

II. Theil. Eigene Bestimmungen.

Da bisher die thermoelektromotorische Kraft der Erze bei geringen, z. B. bei 100°, Temperaturunterschieden nicht bekannt sind, und da mir das zu meinen Untersuchungen über das magnetische Verhalten der Erze gesammelte Material zur Verfügung stand, so entschloss ich mich, dasselbe auch in dieser Richtung zu verwerthen und die thermoelektromotorische Kraft dieser Erze und noch einiger Metalle bei einer Temperaturdifferenz von nahe 100° zu bestimmen. Die zur Untersuchung verwendeten Erze hatten die Form eines vierseitigen Prismas von quadratischem Querschnitt, deren Länge 10 oder 14,6 cm und deren Querschnitt $1{,}4 \times 1{,}4$ cm^2 betrug. Die Metallstäbe und die gepresste Kohle waren von cylindrischer Form.

A) Erwärmungsapparat.

Der Apparat, mit welchem die eine Löthstelle der untersuchten Thermoelemente auf 0° und die zweite auf der Temperatur

der siedenden Wasserdämpfe erhalten wurde, bestand aus folgenden Theilen. Auf einem Brett M (Fig. 1, 2 und 3) befanden sich zwei Träger N, N aus Holz, welche in einem Schlitz des Fussbrettes M einander genähert und dann mittels der Schrauben s, s an M befestigt werden konnten. Auf jedem dieser Träger ist ein cylindrisches Gefäss A aus Gelbblech befestigt. In gleicher Höhe mit diesen und in der Mitte zwischen beiden befindet sich ein drittes cylindrisches Gefäss B aus Gelbblech auf den Eisenträgern l, l befestigt, welches von einem Blechmantel umgeben und mit einem Dampf-Ausströmungsrohre g versehen ist. Die im Längendurchschnitte (Fig. 2) sichtbaren cylindrischen Höhlungen n, welche sich in den die Gefässe querdurchsetzenden Kupferstücken d befinden, dienen zur Aufnahme der zu untersuchenden Stäbe p_1, p_2 (Fig. 1) und die in unmittelbarer Nähe angebrachten Röhren c, in welchen sich etwas Quecksilber befand, zur Aufnahme der aus Jenaer Glas angefertigten Thermometer t_1, t und t_2. Vor jedem Versuche wurden die Gefässe A mit zerstossenem Eise und B mit reinem Wasser gefüllt und letzteres mittels einer Gasflamme zum Sieden gebracht. An den Thermometern t_1 und t_2 wurden die Temperaturen der abgekühlten Enden, am Thermometer t die Temperatur der erwärmten Berührungsstelle der Stäbe p_1 und p_2 abgelesen.

Nachdem das Wasser den Siedepunkt erreicht hatte, wurden die Enden zweier Stäbe p_1 und p_2 aus verschiedenem Material in die Höhlungen n eingeführt, dann die Schrauben s gelüftet, die Träger N soweit, als nöthig, an B herangerückt, dann die Schrauben s angezogen und mittels der Schrauben r, r der Contact zwischen den Stäben und den Kupferstücken d hergestellt. Die Klemmschrauben k, k dienen als Pole der so gebildeten Thermoelemente.

B) Messmethode.

Die Vergleichung der elektromotorischen Kräfte der untersuchten Thermoelemente geschah nach der von KIRCHHOFF modificierten POGGENDORFF'schen Compensationsmethode, deren Vortheile, wie bekannt, darin bestehen, 1) dass die Bestimmung auf einer Längemessung beruht, welche mit grosser Genauigkeit be-

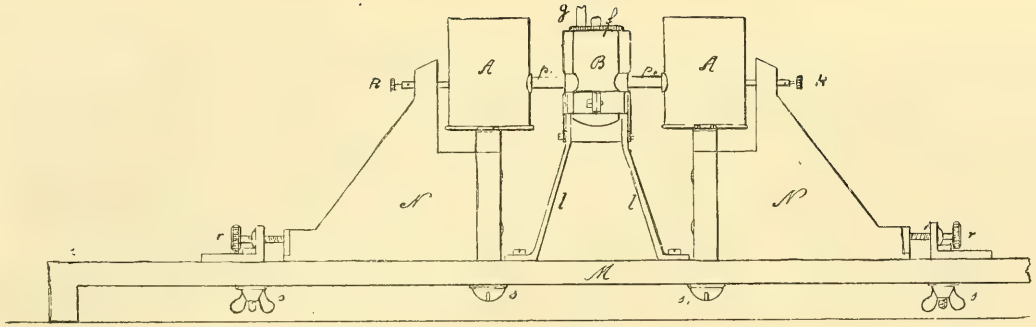


Fig. 1.

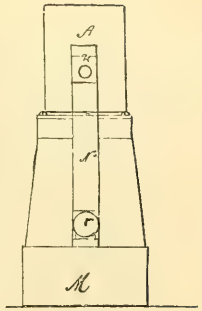


Fig. 3.

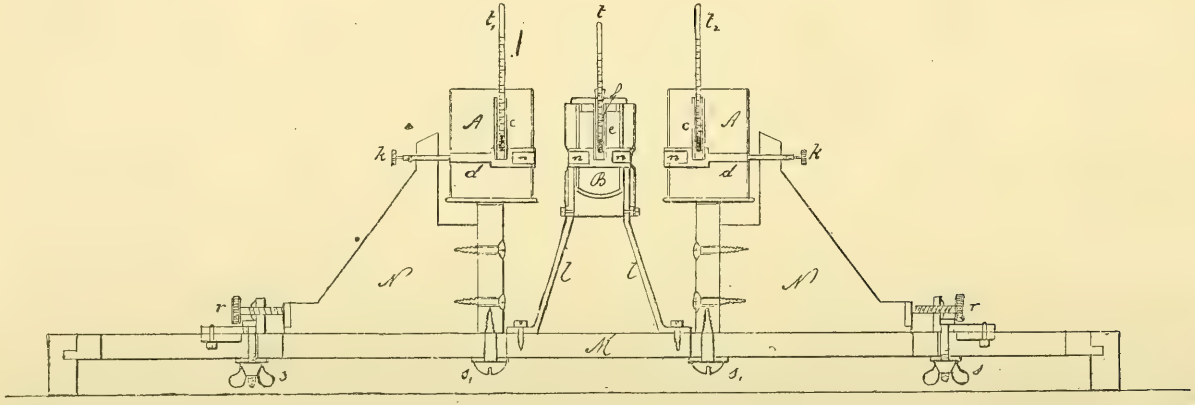


Fig. 2.

werkstelligt werden kann, 2) dass die Nullstellung der Galvanometernadel mit Genauigkeit beobachtet werden kann, 3) dass bei galvanischen Elementen während der kurzen Zeit des Stromschlusses die Polarisation des Elementes auf ein Minimum reduciert wird und endlich 4) dass durch dieselbe das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte ohne die Kenntniss der Leitungswiderstände bestimmt werden kann nach der bekannten einfachen Relation

$$\frac{e}{e'} = \frac{a}{a'},$$

in welcher e, e' die elektromotorischen Kräfte der mit einander zu vergleichenden Thermoelemente, a, a' die auf einem gespannten Platindrahte mittels einer Millimeterscala gemessenen respectiven Längen bedeuten, bei welchen die Compensation, respective die Nullstellung der Galvanometernadel erreicht wird.

Zur Messung der Längen a wurde ein aus der Fabrik von SIEMENS & HALSKE bezogener Apparat verwendet. Unterhalb des 1 m langen gespannten Platindrahtes befindet sich die in Millimeter getheilte Scala, längs welcher der bewegliche Contact auf einer Schiene verschoben werden konnte, bis die Nullstellung der Galvanometernadel erreicht war. Sobald dies stattgefunden hatte, wurde der Arm mit dem Platincontact umgeschlagen und die Länge a an der Scala abgelesen.

Zur Beobachtung der Nullstellung diente ein Spiegelgalvanometer nach WIEDEMANN aus EDELMANN's mechanischer Werkstätte.

Die Compensation geschah mittels des Stromes eines DANIELL'schen Elementes.

Nachdem das Thermoelement, respective zwei verschiedene Stäbe, im Erwärmungsapparate eingestellt war, wurden die Polschrauben k, k und die Pole des compensierenden Elementes in erforderlicher Weise mit dem Schlittenapparate und dem Galvanometer verbunden, der Schlitten so lange verschoben, bis die Nullstellung erreicht war, und dann die Länge a abgelesen. Die so erhaltenen Werthe von a habe ich in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Die Compensierung geschah mittels eines DANIELL'schen Elementes, dessen gut amalgamierter Zinkcylinder in Zinksulfat-

Lösung tauchte. Bei der Bestimmung der in Tabelle I angeführten Thermoelemente wurde ein DANIELL'sches Element von kleiner Oberfläche und einer elektromotorischen Kraft gleich 1,06 Volt benutzt. Die zur Bestimmung der Temperaturen verwendeten Thermometer waren aus Jenaer Glas angefertigt und nach halben Graden getheilt.

Zu bemerken ist, dass die elektromotorische Kraft der Thermoelemente, wie schon SEEBECK beobachtet hatte, anfangs den grössten Wert hat, dann aber in Folge der Wärmeleitung abnimmt, und wie aus meinen Beobachtungen sich ergab, nur sehr spät ein Zustand eintrat, bei welchem die Werthe von a sich nur wenig mehr ändern. Die in diesem Zustande beobachteten Werthe von a sind in der Tabelle I, die Maximalwerthe von a in der Tabelle II zusammengestellt.

Da der Strom des Pyrit-Chalkopyrit-Elementes mittels des Stromes des kleinen DANIELL'schen Elementes nicht compensiert werden konnte, so wurde für dieses Thermoelement und des Vergleichs halber auch für das Bismuth-Antimon-Element zur Compensation ein DANIELL'sches Element von grosser Oberfläche verwendet. Die erhaltenen Resultate waren folgende:

Thermoelement	a	t_1	t	t_2
Pyrit-Chalkopyrit	413,1	1,0°	98,6°	0,6°
Bismuth-Antimon	54,1	0,5°	98,4°	1,0°

Aus diesen Versuchsresultaten ist ersichtlich, dass die Metallsulfide und Metalloxyde unter sich und mit einigen einfachen Metallen schon bei diesem geringen Temperaturunterschiede von 98°—99° C. Thermoelemente von verhältnissmässig bedeutender elektromotorischer Kraft liefern. So ist z. B., wenn die elektromotorische Kraft von

Bismuth-Antimon = 1 ist,

die von

Pyrit-Chalkopyrit = 7,62.

Nach den Resultaten der 2. und 6. Reihe ergiebt sich die elektromotorische Kraft des Pyrit-Pyrolusit-Elementes 4,67mal grösser, als die des Bismuth-Antimon-Elementes.

Tabelle I.

Thermoelektromotorische Kraft einiger Metalle, Metalloxyde und Metallsulfide für den Fall, wo die Werthe von a sich nur wenig mehr änderten.

Thermoelement	a	t_1	t	t_2	Thermoelement	a	t_1	t	t_2
Antimon					Pyrrhotit				
und Eisen . . .	50,9	0,9	98,2	1,5	und Bismuth . .	178,0	0,3	98,2	1,5
„ Kohle . . .	62,1	0,3	98,0	1,0	„ Pyrolusit .	366,4	0,4	98,2	0,9
„ Cadmium .	74,7	0,9	98,2	1,0	„ Chalkopyrit	649,5	0,4	98,2	0,9
„ Zink . . .	77,0	1,2	98,2	1,2	Chalkopyrit				
Bismuth					und Pyrolusit .	313,5	1,2	98,4	0,2
und Zink . . .	134,6	0,5	97,9	1,7	„ Bismuth . .	545,2	0,5	98,4	0,4
„ Eisen . . .	145,3	0,5	97,9	0,9	„ Zink . . .	602,6	2,0	98,2	2,0
„ Kohle . . .	153,4	0,5	98,2	0,5	„ Nickel . .	618,8	0,5	98,0	1,5
„ Cadmium .	162,1	0,5	98,1	0,6	„ Kupfer . .	618,8	0,7	98,2	2,0
„ Kupfer . .	170,2	0,6	98,2	0,9	„ Cadmium .	625,1	1,7	98,4	0,7
„ Antimon .	199,7	1,3	98,1	1,5	„ Nickelerz .	629,2	0,2	98,4	0,6
Pyrolusit					„ Kohle . . .	644,6	0,5	98,4	0,0
und Bismuth . .	210,6	0,2	98,8	0,9	„ Pyrrhotit .	648,8	0,5	98,4	0,4
„ Nickel . .	285,1	0,5	98,4	2,0	„ Eisen . . .	667,1	0,7	98,4	2,0
„ Chalkopyrit	309,6	0,4	98,0	0,9	„ Antimon . .	669,3	0,0	98,2	0,5
„ Kohle . . .	315,2	0,2	98,4	2,0	„ Pyrit . . .	konnte nicht compensiert werden			
„ Cadmium .	319,2	0,2	98,0	0,5					
„ Zink . . .	331,1	0,2	98,0	1,7	Pyrit				
„ Kupfer . .	333,6	0,5	97,6	1,2	und Pyrrhotit .	563,2	0,5	98,2	1,8
„ Eisen . . .	353,9	0,5	97,8	1,0	„ Antimon . .	576,3	0,5	98,2	1,8
„ Pyrrhotit .	370,1	0,8	97,8	1,0	„ Kupfer . .	594,5	0,6	98,2	1,9
„ Antimon .	396,9	0,2	98,0	0,6	„ Zink . . .	600,5	0,5	98,2	1,8
Pyrrhotit					„ Cadmium .	612,5	0,5	98,2	1,6
und Eisen . . .	11,0	0,3	98,2	1,0	„ Kohle . . .	615,6	0,0	98,2	1,0
„ Antimon . .	21,7	0,2	98,4	0,7	„ Eisen . . .	635,9	0,5	99,2	2,0
„ Zink . . .	29,7	0,5	98,2	1,0	„ Nickel . .	642,9	1,8	98,2	1,7
„ Kohle . . .	29,9	0,4	98,2	0,5	„ Nickelerz .	675,8	0,5	98,2	1,8
„ Nickelerz .	41,3	0,5	98,2	0,6	„ Bismuth . .	731,9	1,0	98,4	1,0
„ Cadmium .	53,0	0,5	98,2	0,6	„ Pyrolusit .	933,2	0,4	98,2	2,0
„ Kupfer . .	55,0	0,6	98,2	0,7	„ Chalkopyrit	konnte nicht compensiert werden			
„ Nickel . .	59,8	0,3	98,2	1,5					

Die Compensation konnte bei einiger Uebung in ganz kurzer Zeit erreicht werden, so dass während dieser der Strom des Hydroelementes sich kaum merklich änderte.

Da jedoch diese Versuche längere Zeit in Anspruch nahmen, so musste das DANIELL'sche Element öfters von neuem zusammengestellt werden, wobei sich dann trotz aller Sorgfalt, die auf die Amalgamierung des Zinkes und auf die Reinlichkeit und den Concentrationsgrad der Flüssigkeiten verwendet wurde, kleine

Aenderungen der elektromotorischen Kraft ergeben konnten, welche auf die Versuchsresultate nicht ohne Einfluss waren. Eine weitere Fehlerquelle konnte sich trotz aller Vorsicht bei der Herstellung

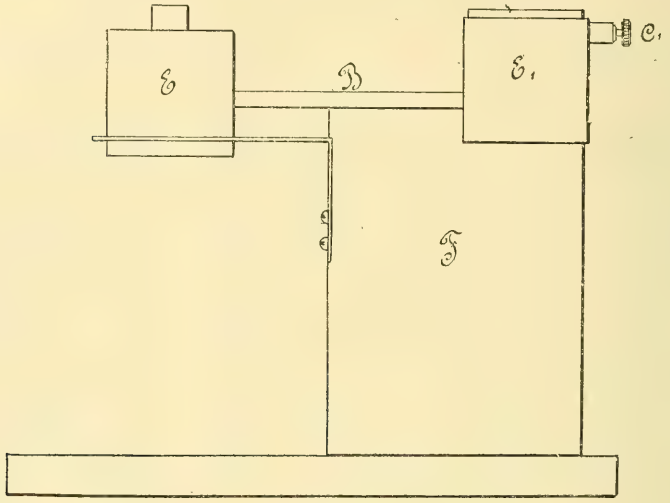


Fig. 4.

des Contacts an den Berührungsstellen auch hieraus ergeben, welche nur durch Zusammenlöthen oder durch sorgfältige Quecksilbercontacte vollständig beseitigt werden können.

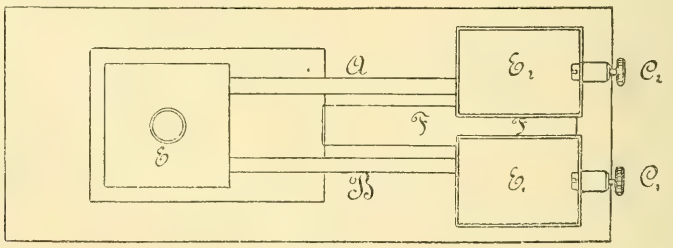


Fig. 5.

In manchen Fällen waren die Differenzen der erhaltenen Werthe von *a* desselben Thermoelementes, respective eines aus denselben Metallen zusammengestellten Thermoelementes sehr

gering, in einigen Fällen aber schon etwas grösser. So wurde z. B. für die Combination Bismuth-Antimon für a der Werth von 81 mm beobachtet, dann wieder bei einer neuen Füllung des kleinen DANIELL'schen Compensationselementes 79,4. Die Differenz dieser Werthe ist gleich 1,6 und die Abweichung der einzelnen vom Mittelwerthe (80,2) beträgt 0,8, also nahe 1%.

Bei einem zweiten Bismuth-Antimon-Elemente von der Form Fig. IV und V wurde bei demselben Temperaturunterschiede mit demselben compensierenden DANIELL'schen Elemente und bei derselben Empfindlichkeit des Galvanometers für a der Werth von 78,5 mm erhalten, welcher vom Mittelwerthe des oben erwähnten Bismuth-Antimon-Elementes um 1,7 mm, also um 2%, abweicht. Die untersuchten Metalle wurden so, wie sie im Handel vorkommen, zu den Versuchen verwendet.

Die Zusammenstellung dieses Bismuth-Antimon-Elementes ist aus den Figuren IV und V zu ersehen. B bezeichnet die Bismuthstange, A die Antimonstange, E das Erwärmungsgefäss, E_1 und E_2 die Kühlgefässe, C_1 und C_2 die Verbindungsschrauben, T das Holzgestell und F die isolierende Substanz zwischen den Kühlgefässen. Dieses bei dem hiesigen Universitätsmechaniker angefertigte Thermoelement hat sich zur Erzeugung constanter schwacher Ströme als sehr zweckmässig bewährt. Auch der in Fig. 1, 2 und 3 dargestellte Apparat ist in derselben Werkstätte nach Angabe angefertigt worden.

Auch eine Tellurstange aus dem königl. ung. Hüttenamt zu Selmeczbánya (Schemnitz) habe ich auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersucht. Von diesen Resultaten will ich nur folgende mittheilen:

	a	t_1	t	t_2
Bismuth-Tellur	57,5	2,5	98,0	1,0
„ Antimon . .	81,0	1,0	97,2	2,0
Chalkopyrit-Tellur .	393,8	1,5	98,0	0,4
„ Antimon	421,9	1,2	98,0	1,0

Aus diesen ist ersichtlich, dass dieses Tellur in der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle vor dem Antimon steht, während das reine Tellur nach den Bestimmungen von E. BECQUEREL und denen von MATTHIESSEN weit nach dem Antimon folgt.

Kennt man die elektromotorische Kraft eines Bismuth-Antimon-Elementes in Bezug auf die eines DANIELL'schen Elementes oder auf ein Volt, so lässt sich mit Hilfe der Werthe a die elektromotorische Kraft der untersuchten Thermoelemente in Volt berechnen.

Nach BECQUEREL ist

$$1\,B/A = 0{,}004826\,D,$$

nach meinen Untersuchungen ist

$$1\,B/A = 0{,}004995\,D,$$

wenn man die elektromotorische Kraft eines DANIELL'schen Elementes kurz mit D und die eines Bismuth-Antimon-Elementes mit B/A bezeichnet.

Bei dieser Untersuchung wurde für eine Thermosäule aus 20 Bismuth-Antimon-Elementen bei einer Temperaturdifferenz von nahe 100° nach der Compensationsmethode für a der Werth bestimmt und dann durch 20 dividiert.

Vergleicht man die mitgetheilten Resultate mit einander, so erhält man für die von mir untersuchten Metalloxyde und Metallsulfide folgende Spannungsreihe:

—		
Chalkopyrit	Kupfer	Eisen
Pyrolusit	Cadmium	Pyrrhotit
Bismuth	Nickelerz	Antimon
Zink	Kohle (für Bogenlicht)	Pyrit
Nickel		+

Die Glieder dieser Reihe folgen dem Gesetze der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle mit hinreichender Annäherung. So findet man z. B.

Pyrolusit/Kohle	+	Kohle/Pyrit	= Pyrolusit/Pyrit
315,2	+	615,6	= 930,8 (beob. 933,2),

ferner

Bismuth/Zink	+	Zink/Pyrit	= Bismuth/Pyrit
134,6	+	600,5	= 735,1 (beob. 731,9).

Von den Untersuchungen, durch welche die grössten Werthe von a gleich nach der Zusammenstellung der Thermoelemente

ermittelt wurden, will ich hier nur jene Versuchsreihen anführen, welche sich auf die Thermoelemente der Metalloxyde und Metallsulfide beziehen. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Tabelle II.

Thermoelektromotorische Kraft einiger Metalle, Metallsulfide und Oxyde gleich nach der Zusammenstellung des Thermoelementes, wo a den grössten Werth hatte.

Element	a	t_1	t	t_2	Z
Galenit I					
und Chalkopyrit . . .	64,8	0,5	98,9	1,1	0
„ Pyrolusit	228,9	0,1	98,9	0,2	0
„ Pyrrhotit	269,1	1,5	99,1	0,6	4
„ Nickelerz	269,7	0,1	99,0	0,1	4
„ Pyrit	409,5	0,6	99,0	1,2	0
Galenit II und Pyrit .	675,8	0,4	99,0	0,5	0
Pyrit					
und Pyrrhotit	118,1	1,5	99,0	2,1	4
„ Nickelerz	185,4	1,0	99,0	2,1	0
„ Galenit I	409,5	0,6	99,0	1,2	0
„ Chalkopyrit . . .	434,3	0,5	98,8	0,8	4
Chalkopyrit					
und Galenit I	64,8	0,5	98,9	1,1	0
„ Nickelerz	108,1	0,8	99,1	0,4	8
„ Pyrrhotit	112,5	0,4	98,7	0,3	0
„ Pyrolusit	122,0	0,4	98,2	0,2	0
„ Pyrit I	434,3	0,5	98,8	0,8	4
„ Pyrit II	543,3	0,2	98,9	0,6	4
Pyrolusit					
und Nickelerz	108,3	0,6	99,1	0,2	4
„ Chalkopyrit . . .	122,0	0,4	98,2	0,2	0
„ Galenit I	228,9	0,1	98,9	0,2	0
Bismuth					
und Antimon	50,3	0,7	98,2	1,2	8

Es ist daher

für Bismuth-Antimon = 1,0
„ Galenit-Pyrit = 13,4
„ Chalkopyrit-Pyrit = 10,8.

Dieser Werth der elektromotorischen Kraft des aus Chalkopyrit und Pyrit bestehenden Thermoelementes ist bedeutend grösser, als der in Tabelle I angeführte, auch ergiebt sich aus diesen Werthen von a, dass auch die Stellung in der Spannungsreihe für einige dieser Körper eine andere ist, als nach Tab. I.

Es ist daher bei diesem Temperaturunterschiede der Berührungsstellen die elektromotorische Kraft des Galenit-Pyrit-Elementes 13,4mal, die des Chalkopyrit-Pyrit-Elementes 10,8mal grösser, als die eines Bismuth-Antimon-Elementes.

Bei den Versuchsreihen für die grössten Werthe von a wurde zur Compensation ein DANIELL'sches Element von grösserer Oberfläche angewendet, und das Spiegelgalvanometer war von geringerer Empfindlichkeit. Die Zahlen der letzten Rubrik der Tabelle II bezeichnen annähernd die in Minuten ausgedrückte Zeit, in welcher a nach der Einstellung des Elementes in den Apparat den grössten Werth erreichte. Dieses fand bei den meisten Elementen gleich nach der Einstellung statt, aber nicht bei jedem. So z. B. war bei dem Bismuth-Antimon-Elemente unmittelbar nach der Einstellung $a = 193{,}6$, nach 4 Minuten aber nur 181,5. Hingegen war bei dem Nickel-Pyrrhotit-Elemente anfangs $a = 15{,}9$, nach 4 Minuten 16,9, nach 8 Minuten 18,8 und nach 12 Minuten 17,4. Ersteres hatte also gleich bei Beginn, letzteres aber erst später den grössten Werth an elektromotorischer Kraft erreicht.

17.

EINFLUSS DES MAGNETISMUS AUF DIE WÄRME-LEITUNGSFÄHIGKEIT DES EISENS.

Von DESIRÉ KORDA.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Januar 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, pp. 169—181.

Ich habe es mir zur Aufgabe gestellt während des näheren Studiums der bekannten Wirkung, welche der magnetische Raum auf das chemische Verhalten der Eisensalze auszuüben im Stande ist, zu untersuchen, ob der magnetische Zustand nicht auch gleichzeitig die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens beeinflusst. Meine Untersuchungen haben mich zu einem positiven Resultate geführt, und es ist mir gelungen, sowohl experimentell als auch auf theoretischem Wege darzulegen, dass in der Richtung der magnetischen Kraftlinien die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens eine geringere wird, ob nun die Richtung der magnetisierenden Kraft eine positive oder negative ist.

Der letztere Umstand lässt uns vermuthen, dass sich die Verringerung mit dem Werthe der magnetisierenden Kraft in paariger Potenz des Verhältnisses äussert. Wie wir sehen werden, ergiebt sich aus den theoretischen Betrachtungen eine quadratisch proportionale Menge, nur dass diese gleichzeitig von dem Werthe des Wärmegrades auch direct abhängt, welch letzterer Umstand deren Verhältnissmässigkeit auf experimentellem Wege nachzuweisen, sehr erschwert.

Die gewonnenen Resultate stellen eine bestimmte Analogie zwischen den ferromagnetischen Körpern und den Eigenschaften der einachsigen Krystalle fest. Ebenso wie bei den Letzteren der Ausdehnungscoëfficient und die Wärmeleitungsfähigkeit in der Richtung der Achse und in der, auf sie senkrecht wirkenden Richtung verschieden ist, so verlieren die magnetisierten Körper auch ihr isotropes Verhalten und nehmen die Eigenschaften der Achse der Krystalle in der Richtung der magnetischen Linien an.

Stellen wir diese in eine Parallele mit jener FRESNEL'schen Erscheinung, nach welcher ein Glasprisma, wenn es in irgend einer Richtung gepresst wird, in der Richtung des Lichtes eine Doppelbrechung zeigt; oder aber mit jenem KERR'schen, bei welchem in dem flüssigen Condensator in Folge der, durch die elektrischen Kraftlinien hervorgebrachten Dyssymmetrie die isolierende Flüssigkeit doppelt brechend wird, und zwar in der Weise, dass ihre optische Achse in die Richtung der Kraftlinien fällt: so wird es sehr wahrscheinlich, dass die magnetisierten Körper in der Richtung der strahlenden Wärmeschwingungen doppelt brechen und gleichzeitig zeigt sich das Resultat unserer Versuche nahe liegend, welches die Veränderung der Wärmeleitungsfähigkeit in der Richtung der magnetischen Linien anzeigt, und welche auf diese Art mit den darauf bezüglichen verwandten Erscheinungen in vollkommenem Einklang zu stehen scheint.

2. Den experimentellen Theil meiner Studien führte ich zuerst auf einer dünnen runden Eisenplatte aus, bei welcher die Wärmequelle ihren Sitz in der Mitte hatte. Bei dieser Einrichtung ist die Erscheinung sehr leicht zu beobachten; bei der nöthigen Vorsicht wird sie sogar so auffallend, dass sie jeden Zweifel an ihrem Vorhandensein ausschliesst. Später, u. z. hauptsächlich vom Gesichtspunkte der quantitativen Beobachtungen, versuchte ich die Wirkung auf Eisenstäbchen, durch welche ich auf die weiter unten zu beschreibende Weise auch pünktlichere Messungen ausführen konnte.

Aus einer etwas dünnern als einen halben Millimeter (0,35 mm) starken Platte aus weichem Eisen, wie man sie zur Armatur von Electromotoren anzuwenden pflegt, liess ich eine im Durchmesser 320 mm messende runde Scheibe schneiden, und daraus

in Zwischenräumen von einem Centimeter eine Skala von concentrischen Kreisen anbringen. In der Mitte wurde eine mit dünnen Wänden versehene Eisenröhre von 90 mm Durchmesser angelöthet, welche im Laufe des Versuches als Wärmequelle diente, auf die einfache Art, dass sie im nöthigen Augenblicke mit heissem Wasser, noch häufiger aber mit heissem Oel gefüllt wurde. Nachdem, in Folge der Abkühlung diese Wärmequelle, im Laufe des Experimentes nicht im Entferntesten als gleichmässig warm betrachtet werden konnte, wurde die erwähnte Röhre bei einer späteren Einrichtung so montiert, dass sie durch die Scheibe durchgeführt wurde und so, nachdem sie noch an beiden Enden geöffnet blieb, konnte ich durch diese während der gewünschten Zeit eine heisse Flüssigkeit von nahezu constanter Temperatur durchfliessen lassen. Damit mir eine bedeutend stärkere Wärmequelle zur Verfügung steht, beabsichtigte ich einige Zeit lang die Kohlenstangen einer electrischen Bogenlampe in der Achse des Rohres anzubringen; ich war aber genöthigt von meinem Vorsatze abzustehen, damit keine magnetischen Räume in der Scheibe entstehen, da diese die Quelle von Fehlern wären.

Vor dem Experimentieren überzog ich die ganze Scheibe mit einer dünnen sehr gleichförmigen Paraffinschichte und befestigte sie an den Polen eines vertical eingerichteten starken FARADAY-BECQUEREL'schen Electromagneten. Die Pole waren kreisförmig, im Durchmesser von 72 mm, der Mittelpunkt sowohl des Nord- als auch des Südpoles war von dem Rande der Scheibe 59 mm entfernt, befand sich also vom Mittelpunkte der Scheibe in einer Entfernung von 102 mm. Grosse Sorgfalt verwendete ich darauf, dass die Pole der Magnete als Metallstangen von einer grösseren Masse, im Laufe des Versuches keine wärmeableitende Wirkung auf die Scheibe ausüben können, denn sonst würde das ganze Resultat des Versuches ein illusorisches gewesen sein. Desshalb wurde die Scheibe von den Polen durch eine gut comprimierte, anderthalb Centimeter dicke, Wollschichte und eine Glimmerblättchenschichte von entsprechender Ausdehnung getrennt. Auf diese Weise konnte der Einfluss jener schädlichen Wärmeableitung thatsächlich vermieden werden, wie dies das Experiment bewiesen hat. Ich befestigte nämlich die Scheibe an den Polen

und goss die heisse Flüssigkeit in die zu ihrer Aufnahme dienende Röhre so lange, bis die Magnetspulen angeregt wurden, und das Schmelzen der Paraffinschichte, welches durch die, auf der Scheibe sich verbreitende Wärme verursacht wurde, in jeder Richtung gleichmässig, folglich genau in concentrischen Kreisen vor sich ging. Der wärmeableitende Einfluss der Pole verschwand daher gänzlich.

Nach einigen Minuten trat der definitive Zustand ein und wir können, mit Hilfe der, durch die concentrischen Kreise gebildeten Skala bestimmen, bis zu welchem Kreise das Paraffin geschmolzen ist.

Nach gänzlicher Auskühlung beginnen wir das Experiment von Neuem, jedoch mit dem wesentlichen Unterschiede, dass wir, indem wir die heisse Flüssigkeit eingiessen, gleichzeitig die Magnetspulen anregen. Diesmal wird also die Eisenscheibe in der Richtung der, die Pole verbindenden Magnetlinie magnetisiert, und, wie wir dies deutlich wahrnehmen können, schmilzt das Paraffin nicht mehr in concentrischen Kreisen, sondern in Form von elliptischen Grenzlinien, und verräth dadurch die in dem Eisen vor sich gegangene Veränderung. Die kleine Achse dieser elliptischen Curve, fällt in die Richtung der Magnetachse, die grosse Achse aber scheint in dem Grenzkreise des vorerwähnten Experimentes genau mit dem auf die Magnetachse senkrecht fallenden Durchmesser übereinzustimmen.

Die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens sinkt demgemäss in der Längsrichtung der Kraftlinien.

Bei einer Scheibe im Durchmesser von 320 mm hatte der grösste Kreis bis zu welchem das Paraffin, bei Benutzung von heissem Oel, schmolz, einen Durchmesser von 200 mm. Gleichzeitig verfügte die auf der magnetisierten Scheibe gebildete elliptische Curve über eine grosse Achse, während ihre kleine Achse 175 mm betrug. Es trat demnach der Magnetachse entlang eine mehr als 12 percentige Veränderung in der Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens ein. Eine lange Reihe von Versuchen führte mich jedesmal sehr nahe zu diesem Werthe und zwar ganz unabhängig von der Richtung des den Magnet anregenden Stromes, oder aber von den Vorzeichen der Magnetpole.

Ich wiederholte dasselbe Experiment auf einer kleineren Scheibe, deren Durchmesser nur 80 mm war. In der Mitte war, um die Wärme zuzuleiten, eine 20 mm dicke Metallstange angebracht, welche durch die Scheibe durchgesteckt war. Die Pole des hierzu benutzten verticalen U-förmigen Elektro-Magneten hatten einen Durchmesser von 24 mm, die Entfernung der Achse aber war 80 mm, sodass der Rand der darauf gelegten Scheibe gerade in die Achse der Pole fiel. Als das Schmelzen des Paraffins auf der magnetisierten Scheibe begann, vollzog es sich zuerst in Gestalt einer Ellipse, als es jedoch an den Rand der Scheibe gelangte, verflachte es sich so, dass die Grenzcurve nicht mehr elliptisch war, sondern vielmehr eine lemniskate-bisquitförmige Gestalt mit der die Magnetachse schneidenden Vertiefung annahm. Das Paraffin schmolz also in einem symmetrischen Theile um die Pole herum nicht, im Gegensatze aber schmolz es in der senkrechten Richtung der Magnetachse und zeigte die Ausbreitung der Wärme an.

3. Wenn die Grenzcurve des Schmelzens zur Darstellung der Erscheinung auch sehr entsprechend war, war sie jedoch zur Ausführung von Messungen nicht zweckmässig. Anderseits wollte ich das gefundene Resultat auch auf andere Weise controlieren. Desshalb benutzte ich bei meinen weiteren Versuchen anstatt der Scheibe ein stangenartiges Eisenstück, und leitete meine Messungen auf Zeit- und Wärmegradmessungen zurück, welche vom Gesichtspunkte der Pünktlichkeit am leichtesten auszuführen sind. Die Zeit mass ich mit einem pünktlichen Chronometer, die Werthe des Wärmegrades bestimmte ich in einem Falle mit Hilfe eines thermoelectrischen Elementes, im andern Falle hingegen durch Aenderung des electrischen Wiederstandes, also mittels einer WHEATSTONE'schen Brücke.

Der Verlauf des Versuches war auf die einfachste Weise der folgende: Ein 7 mm starker Eisendraht war unter einem rechten Winkel gebogen. Auf den 200 mm langen horizontalen Theil desselben war eine magnetisierende Spule angebracht und zwar mit Hilfe der an dem Eisendrahte befestigten Isolierstöpsel in möglichst concentrischer Lage, der 100 mm lang herabhängende Theil des Drahtes diente dagegen zur Aufnahme und

weiteren Leitung der Wärme einer darunter gestellten BUNSEN'schen Lampe. Die Dimensionen der magnetisierenden Spule waren die folgenden: Länge: 138 mm, äusserer Durchmesser: 47 mm, innere Oeffnung: 17 mm, Stärke des Drahtes: 1 mm, gemessener Widerstand: 2,77 Ohm, Zahl der Windungen: 1250. Mit Hilfe der Inductionscurven des Eisens bestimmte ich, dass einem Strome von 0,1 Ampère in die erregende Spule im Eisen ein Inductionswerth von nahezu $B = 12000$ cgs entsprach und 0,5 Ampère $B = 17000$ cgs. Eine grössere Stromstärke konnte ich wegen des Vermeidens der Durchwärmung der Spule nicht anwenden.

Die an dem Ende der Eisendrähte sich einstellenden Temperaturschwankungen zeigte ein thermoelectrisches Element (Platin-Eisen) an, welches mit einem sehr empfindlichen DEPREZ-d'ARSONVAL'schen Galvanometer in Verbindung stand. Das Letztere war Herr Professor MARCEL DEPREZ, so liebenswürdig mir in seinem Laboratorium im Conservatoire des Arts et Métiers zur Verfügung zu stellen.

Die eine verlöthete Stelle des Thermo-Elementes war fortwährend auf Eisstücken gebettet, während die andere an das Ende, des zu prüfenden Eisendrahtes, in Form eines Hackens befestigt war. Um die Wärmestrahlen abzuhalten war die Spule und das Thermo-Element von dem BUNSEN'schen Brenner durch einen Schirm getrennt. Es versteht sich von selbst, dass ich den Apparat nach jedem Versuche vollständig abkühlte.

Die folgenden Zahlen zeigen das Resultat der Messungen:

Zeit	I.	II.	III.
0′	0	0	0
2′	0,5	0,5	0,5
2′ 30″	1,5	1	1
3′	3	2,5	2
3′ 30″	4	3	2,5
4′	5,5	4	3,5
4′ 30″	6,5	5	4
5′	8	6	5

die Zahlen unter I. zeigen die Ausweichungen des Galvanometerfleckens auf der Skala, wenn die Eisenstange nicht magnetisiert

ist, während sich die unter II. auf den 0,1 Ampère, und endlich die unter III. auf den 0,5 Ampère erregenden Strom der magnetisierenden Eisenstange beziehen.

Trotzdem ich alles aufbot, dass die hiezu benützte BUNSEN'sche Lampe, welche mit einer schnell zu entzündenden kleinen Flamme versehen, und leicht zu regulieren war, eine gleichmässige Wärmequelle bilden möge, so können dennoch Zweifel entstehen, ob nicht die dazu benützte Wärmequelle selbst gleichzeitig eine Quelle der Fehler ist, um so mehr als die gefundenen Werthe, wider Erwarten sehr grosse, 30 perzentige Temperaturabnahmen aufwiesen.

Um den, aus dem erwähnten Umstande entstehenden Fehler zu eliminieren, musste ich meine Zuflucht zu einem, an die Nullpunktmethoden erinnernden Vorgehen nehmen; und nachdem sich das Anwenden von Thermo-Elementen zu diesem Zwecke, einerseits wegen der Erscheinung der Inversionstemperatur, anderseits aber wegen der aus dem Parallellaufen der beiden Eisenstangen entstehenden magnetischen Zerstreuung als unbequem erwies, bewerkstelligte ich meine Methode mit Hilfe einer WHEATSTONE'schen Brücke auf die folgende Weise.

An dem rechts- sowie linksseitig 9 mm starken, im ganzen 230 mm langen Schafte eines verticalen Metallkreuzes in Form eines *T*, befestigte ich einen 7 mm dicken und 115 mm langen verticalen Eisendraht. Der mittlere Theil des Metallkreuzes, welcher aus einer 20 mm dicken und 240 mm langen Kupferstange hergestellt war, war dazu bestimmt, die Wärme der unter ihn gestellten BUNSEN'schen Lampe, dem rechten und linken Theile des dünneren Zweiges und den benachbarten Eisenstangen in gleichem Masse zu vermitteln. Jene dickere Stange war anfangs derart beweglich angebracht, dass man den Wärmeleitungsunterschied, welcher sich bei einem ohne den erregenden Strom ausgeführten Versuche möglicher Weise zwischen den beiden Hälften zeigen könnte, durch Verschiebung nach rechts oder links auf ein Minimum reducieren konnte. Diese Stange wurde danach in ihrer mit Hilfe des Galvanometers bestimmten Lage endgiltig befestigt.

Um die beiden mit Asbestpapier umwickelten Enden des Eisendrahtes war ein haardünner Platindraht gewickelt, welcher ein Platinthermometer bildete, dessen Widerstand bei der Tem-

peratur der Umgebung nahezu 14 Ohm war. Das Wechseln ihres Widerstandes zeigte an der WHEATSTONE'schen Brücke die zufällige Temperaturdifferenz zwischen den beiden freien Enden des Eisendrahtes.

In den zwei benachbarten Aesten der WHEATSTONE'schen Brücke waren die beiden erwähnten Platinfäden eingeschaltet, den dritten Zweig bildete eine Spule mit einem Widerstande von Tausend Ohm, während der vierte Zweig von dem zum Einstellen nothwendigen Messkasten gebildet wurde.

Der Verlauf des Versuches war der folgende. Zuerst stellte ich mit Hilfe des Messkastens das Galvanometer auf den Nullpunkt ein, sodann begann ich die dicke Eisenstange zu erwärmen und beobachtete das Ausweichen des Galvanometers und die dazu nothwendige Zeit. Ich stellte dabei fest, dass nahezu eine halbe Stunde dazu nöthig war, bis der Regime-Zustand eintrat bei welchem das Galvanometer nach einer sehr langsamen Verschiebung den Skalentheil 2,5 anzeigte und über diesen hinaus sich nicht mehr bewegte. Dass diese Ausweichung so gering blieb, habe ich der so sorgfältig erprobten Lage der Kupferstange zu verdanken, welche im Stande war die Differenz zwischen dem rechten und linken Theile grösstentheils auszugleichen.

Nachdem ich den Apparat abkühlen liess, begann ich den Versuch von Neuem und zwar wieder ohne erregenden Strom, und mass genau, wieviel Zeit verging von der Zeit wo ich die BUNSEN'sche Lampe einstellte bis zu dem Augenblicke, in welchem das Galvanometer den Skalentheil 2, folglich den unmittelbar vor dem Rigime-Zustande gelegenen erreichte. Die Messung ergab 18 Minuten 15 Secunden. Hier muss ich bemerken, dass ich auch in dem Falle 18 Minuten zählte, als ich in beide Spulen gleichzeitig einen erregenden Strom sandte.

Der nächste Versuch fand mit einem erregenden Strom von 0,1 Ampère statt und zwar auf die Weise, dass nur die rechtsseitige Eisenstange magnetisiert wurde. Dabei nahm ich wahr, dass der Skalentheil 2 nach 22 Minuten erreicht wurde, also mehr als vierthalb Minuten mehr nöthig waren, um die gegebene Temperaturhöhe zu erreichen, als die Wärme sich mittels magnetisierten Eisens verbreiten musste.

Zu den Controlmessungen diente mir jenes Experiment, bei welchem ich den erregenden Strom von nur 0,1 Ampère Stärke, nicht in die rechts- sondern in die linksseitige Spule sandte. Der gefundene Werth war diesmal 15 einhalb Minuten, folglich eine bedeutend kürzere Zeitdauer als bei den ersten Versuchen, wo keine von den Spulen erregte, was bewiesen hat, dass in dem Falle, wenn keine von den Eisenstangen magnetisiert ist, die Dyssymmetrie zwischen den rechts- und linksseitigen Theilen, welche es nicht gelang vollständig zu eliminieren, von solcher Natur war, dass in Folge davon der rechtsseitige Theil die Wärme besser leitete als der linksseitige.

4. Was die Theorie der oben beschriebenen Erscheinungen anbelangt, kann ich meine diesbezüglichen Schlüsse in dem folgenden zusammenfassen.

Es ist eine bekannte Erscheinung, dass das weiche Eisen, durch das Magnetisiertwerden seine Dimensionen ändert. JOULE bewies schon im Jahre 1847* durch Experimente, dass eine Eisenstange in der Richtung der Magnetlinien eine elastische Verlängerung erleidet und zwar stand diese Ausdehnung so weit sich seine Versuche erstreckten, im Verhältnisse mit dem Quadrate der magnetisierenden Kraft. Ausserdem stellten HELMHOLTZ** einerseits und KIRCHHOFF*** anderseits auch theoretisch fest, dass eine weiche Eisenkugel in gleichmässigem magnetischen Raume in der Richtung der Kraftlinien eine Ausdehnung erleidet und in den dazu normalen Richtungen sich zusammenzieht; und zwar ist nach KIRCHHOFF die maximale Längenveränderung, welche der Radius R einer weichen Eisenkugel in der Richtung der Kraftlinien erleidet von der Grösse

$$\frac{153}{176}\frac{H^2}{2\pi E}R,$$

wo H die magnetisierende Kraft bedeutet, welche von der Kugel weit entfernt, das heisst an einer solchen Stelle zu messen ist, wo die störende Einwirkung der Kugel auf den magnetischen Raum,

* Philosophical Magazine and Journal of Science. p. 30, 76 und 225.

** Wiedemann. Annalen. XIII. p. 385.

*** Wied. Ann. XXIV. p. 52 und XXV. p. 601.

in welchem sie versetzt wurde, schon verschwindend klein ist, ferner bedeutet E die Elastizitätsconstante, deren Werth bei weichem Eisen $1{,}8 \cdot 10^{12}$ c. g. s. ist.

Dieser, sich nur auf schwaches Magnetisieren beschränkende specielle Fall, abgesehen von den ständigen, steht im Einklange mit MAXWELL's* allgemein geltenden Rechnungen, nach welchen neben der magnetisierenden Kraft H und der magnetischen Induction B, die auf der Eisenkugel in Folge des Kraftraumes sich zeigende Wirkung genau so ist, wie wenn ein gleichmässig vertheilter hydrostatischer Druck von $\frac{H^2}{8\pi}$ Grösse, combiniert mit der Grösse $\frac{BH}{4\pi}$ in die Richtung der Kraftlinien fallen und durch Zugspannung auf die Kugel wirken würde.

Wenn also Px, Py, Pz die Componenten der resultierenden Wirkung sind und wenn die Richtung des magnetischen Raumes nach unserer Voraussetzung in die Richtung der Achse x fällt, dann ist nach MAXWELL's Berechnung:

$$\left.\begin{aligned} Px &= \frac{B \cdot H}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \\ Py &= Pz = -\frac{H^2}{8\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese MAXWELL'sche Formel können wir auch auf die kreisförmige Platte und folglich auch auf die im 2. Punkte versuchsweise geprüfte Eisenscheibe anwenden. Der Ausdruck Px und Py bleibt in diesem Falle unverändert, Pz aber wird $= 0$, wie dies durch das Verfolgen des Ganges der citierten MAXWELL'schen Rechnungen bewiesen werden kann.

Auf ähnliche Weise kann der Ausdruck Px auf dünne stangenähnliche Magnete angewendet werden, vorausgesetzt dass $Py = Pz = 0$ ist. Dies entspricht dem Falle der im 3. Punkte geprüften Eisenfäden.

Wir können also diese MAXWELL'sche Formel dazu benützen, um die Theorie der von uns geprüften Erscheinungen zu entwickeln, und zwar auf die Weise, dass wir sie mit den Grundsätzen der Wärmetheorie in Verbindung bringen. In unserem Falle

* Maxwell. Electricity and Magnetismus. § 642.

können wir einen geschlossenen Kreisprozess ins Auge fassen, wir können daher den ersten Satz mit Recht anwenden, aber gleichzeitig können wir auch einen verkehrten Kreisprozess, und so auch den zweiten Satz der Wärmetheorie anwenden.

5. Erwägen wir zuerst den Fall der magnetisierten Weicheisenkugel. Es sei x die Länge der Stange, H die magnetisierende Kraft und B die entsprechende magnetische Induction von H. Wenn μ die Permeabilität bei dem gegebenen ϑ Wärmegrad der Stange und des in Rede stehenden Werthes von H ist, dann ist nach der Definition μ bekannt:

$$B = \mu H. \quad \cdots \quad (2)$$

Theilen wir nun die Wärmemenge dQ dieser magnetisierten Stange mit, so werden in Folge dessen zweierlei Veränderungen eintreten, es wird nämlich die Länge der Stange durch die Quantität dx verändert und ihr Wärmegrad wird durch den Werth d ebenfalls gehoben.

Wenn bei der constanten Länge der Stange c die specifische Wärme des Eisens ist und q jene Wärmemenge, welche man bei einer gleichmässigen Temperatur der magnetisierten Stange mittheilen müsste, damit diese die Längenveränderung von der Einheit erleidet, dann verbindet die beiden notierten Veränderungen die folgende Relation:

$$dQ = c \cdot d\vartheta + q \cdot dx. \quad \cdots \quad (3)$$

Währenddem indessen die magnetisierte Stange die Längenveränderung dx erleidet, wird im Gegensatze, in der in ihre Richtung fallenden Kraft Px

$$d\mathfrak{L} = Px \cdot dx$$

oder aber in Folge von (1) und (2)

$$d\mathfrak{L} = \left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 \cdot dx \cdot \quad \cdots \quad (4)$$

die äussere Arbeit vollbracht werden.

Wenden wir nun auf unseren Fall nacheinander den ersten und zweiten Satz der Wärmetheorie, mit Rücksichtnahme auf die Ausdrücke (3) und (4) an.

Wenn A das Arbeits-Aequivalent der Wärme und dU die der Zustandsänderung entsprechende innere Arbeit ist, dann ver-

langt der Grundsatz der Erhaltung der Energie, dass die rechte Seite der Gleichung

$$dU = d\mathfrak{L} - A \cdot dQ \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

ein vollständiges Differential sei. Diese rechte Seite wird mit Hilfe von (3) und (4) auf die folgende Weise geschrieben:

$$-A \cdot c \cdot d\vartheta + \left[\left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 - A \cdot q\right] \cdot dx$$

und dafür, dass dieser Ausdruck ein vollkommenes Differential sei ist, die nothwendige und genügende Bedingung die folgende:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-A \cdot c) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 - A \cdot q\right].$$

Wenn wir bedenken, dass μ die vom Wärmegrad abhängige Menge ist, während wir im Gegensatze dazu durch kein einziges bis jetzt versuchtes Experiment berechtigt sind zu schliessen, dass der Werth von H, welcher sich auf die Luft, oder aber genauer gesagt auf den Aether bezieht, ebenfalls von der Temperatur abhängt, dann gewinnen wir aus den oben erwähnten den folgenden ersten Zusammenhang:

$$A\left(\frac{\partial q}{\partial \vartheta} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{H^2}{4\pi}\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Einen zweiten Zusammenhang zeigt uns der CARNOT'sche Satz, in dessen Sinne die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{dQ}{\vartheta} = \frac{c}{\vartheta} d\vartheta + \frac{q}{\vartheta} dx \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ebenfalls ein vollständiges Differential ist, wozu wieder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\vartheta}\right) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{q}{\vartheta}\right)$$

nothwendig ist oder aber nach Ordnung die Bedingung

$$\frac{q}{\vartheta} = \frac{\partial q}{\partial \vartheta} - \frac{\partial c}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

erfüllt ist.

Durch das Vergleichen von (6) und (8) gelangen wir endlich zu dem gesuchten Zusammenhang

$$q = \frac{H^2 \cdot \vartheta}{4\pi A} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

welcher die Lösung unseres Problemes enthält.

q ist nämlich das Maass desjenigen Theiles der mitgetheilten Wärme, welche in Folge des magnetischen Zustandes nicht auf die Veränderung der Temperatur verwendet wird, sondern sich in latente Wärme umwandelt. Wie bekannt, wächst, wenn auch nur sehr langsam, zwischen 0^0 und 600^0 C fortwährend und zwar in den bezeichneten Grenzen annäherungsweise

$$\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = 0{,}0002$$

ihrer positiven Quantität entsprechend, demzufolge ist q in denselben Grenzen von positivem Werthe und so wird der der Wärme durch positive Quantität gegebene Theil davon entzogen, damit er in der magnetisierten Eisenstange eine Temperaturerhöhung hervorbringe.

Wenn wir, im Gegentheile zu dem wie wir es gethan, die Q-Wärmequantität der Eisenstange mitgetheilt hätten und dann erst die letztere magnetisiert hätten, dann würde Q zur beständigen Quantität während der Dauer des magnetischen Zustandes, es würde $dQ = 0$ und so erweist sich nach (3)

$$d\vartheta = \frac{-q}{c}\, dx. \quad \cdots \quad (10)$$

Nachdem aber beim Eisen, wie wir dies im 4. Punkte hervorgehoben haben, in Folge des Elektrisierens in den bezeichneten Grenzen eine Ausdehnung in der Richtung der Kraftlinien zu Stande kommt und so dx von positivem Werthe ist, andererseits aber Q, wie wir dies eben früher festsetzten, auch eine positive Quantität ist, c aber schon durch seine Definition ebenfalls, desshalb ist $d\vartheta$ (10) von negativem Werthe, und so würde die Stange in Folge des nachträglichen Magnetisierens eine Verringerung der Temperatur erleiden.

Indem wir das Gesagte zusammenfassen, kommen wir zu dem Schlusse, dass eine magnetisierte Eisenstange bei dem sich einstellenden Endzustande (Regime) über eine geringere Temperatur verfügt, als wenn sie nicht magnetisiert wäre. Nachdem aber andererseits das Mittheilen der Wärme zwischen dem Eisen und seiner kälteren Umgebung im proportionalen Verhältnisse zu dem Temperaturunterschiede steht, so geschieht in Folge dessen das

Ausbreiten der Wärme durch das magnetisierte Eisen in geringerem Maasse als durch nicht magnetisiertes Eisen; vorausgesetzt natürlich, dass sich das Ausbreiten in der Richtung der Kraftlinien vollzieht und das Eisen mit Bezug auf die Permeabilität die kritische Temperatur nicht erreicht hat.

6. Wenn wir das oben Erwähnte auf den Fall der Eisenscheiben anwenden wollen, so steht uns nichts im Wege, wir müssen uns nur vorstellen, dass sich die Eisenscheibe in der Richtung der Kraftlinien so verhält wie der magnetisierte Eisenfaden, im Gegensatze dazu ist sie in der verticalen Richtung der Anspruchnahme, einem gleichmässig vertheilten specifischen Drucke in der Höhe von

$$Py = -\frac{H^2}{8\pi}$$

unterworfen.

Indessen können wir uns leicht überzeugen, dass sich das Resultat unserer Berechnungen trotz dieser Inanspruchnahme durchaus nicht ändert, nachdem die Gleichung (6), das heisst die Einzige, auf welche die Componenten der äusseren Kraft einen Einfluss ausüben können, von Py unabhängig bleibt und so unverändert constant wird. So wird also der Einflufs von Py vollständig eliminiert.

Hieraus können wir schliessen, dass auch bei Eisenscheiben die Veränderung in der Ausbreitung der Wärme nur in der Richtung der magnetischen Kraftlinien auftritt, in den verticalen Richtungen oder aber auf den äquipotentialen Linien hat der Magnetismus dagegen keinen Einfluss. Die in dem zweiten Punkte erwähnten experimentellen Resultate stimmen mit diesen theoretischen Schlüssen überein und beweisen so die Richtigkeit unserer vorherigen Erörterungen.

Aehnliche Schlüsse können wir auch auf magnetisierte Eisenkugeln anwenden, nachdem die Giltigkeit der Gleichung (6) $Py = Pz$ von deren Werthe unabhängig auch mit Bezug auf diese besteht. Ich benutze diese Gelegenheit, um hier nebensächlich als überraschendes zufälliges Beispiel die Ausbreitung der inneren Wärme der Erde durch die zwar in geringem Maasse magnetisierte Erdkugel zu erwähnen. GAUSS bewies, dass der Erdmagnetismus nicht in den ausser ihr liegenden Körpern,

sondern in ihrem Inneren zu suchen ist. In dem Falle also, wenn die magnetische Permeabilität der Erde ein dem Eisen ähnliches Betragen aufweist, dann würde die innere Wärme der Erde in geringem Maasse sich mehr gegen den magnetischen Aequator ausbreiten als in der Richtung der Magnetpole der Erde und zwar trotz dem grossen Unterschiede der Temperaturen in der äusseren Athmosphäre, nachdem die letzteren, nach den zahlreichen Berechnungen von ARAGO, nicht tiefer als 20 m in die Erdrinde eindringen.

18.

„ANDORINA“ UND „DARÁNYIA“, ZWEI NEUE BRACHYUREN-GATTUNGEN AUS UNGARN.

(Mit einer Tafel.)

Von Dr. E. LÖRENTHEY.

Vorgelegt der Akademie durch das ord. Mitglied Prof. Dr. Anton Koch in der Sitzung vom 21. Mai 1900.

Am 7. Mai dieses Jahres feierte die ungarische Geologie ein erhabenes Fest, indem Ackerbauminister Herr Dr. Ignatz Darányi de Puszta-Szentgyörgy et Tetétlen an diesem Tage das durch ihn zu Stande gekommene Palais der königlich ungarischen Geologischen Anstalt eröffnete, das erste in Mittel-Europa, welches ausschliesslich zu Zwecken der Geologischen Anstalt erbaut wurde; denn obzwar sich z. B. in Berlin ein besonderes Geologisches Museum befindet, so dient es doch nicht ausschliesslich den Zwecken der Geologischen Anstalt, sondern ist zugleich auch Bergakademie.

Für das neue Heim der Geologischen Anstalt sind nicht nur die Angestellten derselben, sondern auch all die Fachleute zu Dank verpflichtet, welche das Museum, die Bibliothek, die Räumlichkeiten der Anstalt auf welche Art immer in Anspruch nehmen. So möchte denn auch ich aus Freude und Liebe zur Geologie auf eine mir zu Gebote stehende Weise dem Herrn Minister Dr. Ignatz von Darányi und dem Herrn Dr. Andor von Semsey meine Dankbarkeit zum Ausdruck bringen, dass sie das Zustandekommen des glänzenden Palastes der geologischen Wissenschaften,

zu welchem die Haupt- und Residenzstadt Budapest den Grund, Herr Dr. ANDOR SEMSEY DE SEMSE hunderttausend Kronen und zur inneren Einrichtung des neuen Gebäudes abermals circa zwanzigtausend Kronen spendete, ermöglichten.

Zum Andenken an dies grosse Werk benenne ich eine neue Art *Darányia*, eine andere *Andorina*.

Andorina, nov. gen.

Während aus den jüngeren Tertiärbildungen auffallend wenig Krabbengattungen aus der Familie der Oxyrrhynchidae oder Maioideae bekannt sind, leben heute ihrer überaus zahlreiche Gattungen. Wir sind noch weit entfernt, die Verwandtschaft zwischen den fossilen und lebenden Formen auch nur annähernd ausweisen, noch weiter jedoch davon, den Versuch wagen zu können, die Descendenz der lebenden Formen von den fossilen festzustellen. Ich kenne weder eine fossile noch eine lebende Verwandte der zu beschreibenden aus dem Miocaen stammenden Form und somit ist dieselbe eine ausgezeichnete neue Gattung, welche ich zu Ehren des Herrn Dr. ANDOR SEMSEY DE SEMSE *Andorina* heisse, da der Name *Semseya* bereits zur Bezeichnung der Foraminifere *Semseya lamellata, Frnz.* als Gattungsname vergriffen ist. [Semseya, eine neue Gattung aus der Ordnung der Foraminiferen. Von Dr. AUGUST FRANZENAU. (Math. Naturw. Berichte aus Ungarn XII.)]. Bisher ist mir nur eine Art dieser Gattung bekannt, die *Andorina elegans nov. spec.* und diese auch nur in einem Exemplare.

Die Familie der Oxyrrhynchidae wurde in den ungarischen Miocaenbildungen bisher nur durch jene wenigen Gliedmaassentheile vertreten, die ich in Budapest-Rákos aufsammelte und unter Fragezeichen als zur *Lambrus*-Gattung [Lambrus? sp. ind.] gehörend* nach RISTORI bezeichnete, der aus den Miocaenbildungen des Monte Mario ähnliche Gliedmaassentheile zeichnet und eben-

* Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs. P. 91. Auf der Seite 119 befindlichen Tabelle ist diese Gattung irrthümlich unter den Oxystomidae angeführt, jedoch auf Seite 91 richtig unter die Oxyrrhynchidae gestellt.

falls unter Fragezeichen zur *Lambrus*gattung zählt.* Nachdem jedoch unter den in unseren Miocaenbildungen vorkommenden Krabben bisher nur die *Andorina* mit vollkommener Sicherheit in die Familie der *Oxyrrhynchidae* gehört und da innerhalb dieser Familie nicht nur die Gattung *Lambrus*, sondern auch die Arten der Gattungen *Chorilia*, *Hias* und *Pugettia* Gliedmaassen von ähnlicher Form und Verzierung haben, kann angenommen werden, dass die *Andorina* ähnliche Extremitäten hatte und somit die Gliedmassentheile von Budapest-Rákos nicht zu *Lambrus*, sondern wahrscheinlich zur *Andorina* als deren Scherenfüsse gehören. Dies ist um so wahrscheinlicher, da von Budapest-Rákos kein anderer Überrest von Krabben aus der Familie der *Oxyrrhynchidae*, als die erwähnten Gliedmaassentheile und vom anderen, nahen Fundorte nur der Cephalothorax der *Andorina* bekannt ist. Für diese Ansicht spricht ausser der Nähe der beiden Fundorte noch der Umstand, dass beide Funde aus derselben Schichte stammen.

Andorina elegans, nov. sp.

[Taf. I. Fig. 1*a*—1*e* u. Fig. 2.]

1900. *Andorina elegans, nov. sp.* Lörenthey. Andorina és Darányia két új ráknem Magyarországból. [Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. No. V. P. 833. Tab. III. Fig. 1*a*—1*e* és 2. ábra.]

Der kleine Cephalothorax ist kugelig. Sein grösster Breitendurchmesser befindet sich beiläufig auf dem rückwärtigen Drittel. Der Cephalothorax ist in der Breite stark convex, am meisten in der Mittellinie, in der Länge weniger. Der Vorderrand wird von drei Paar kurzen, breiten, convexen Lappen gebildet, worunter die zwei mittleren die schmalsten und längsten, während die breitesten die zwei rückwärtigen sind, welche die Augenhöhle zu verdecken scheinen und somit die grossen Augenhöhlen seitlich stehen. Diese Fortsätze oder Lappen werden durch Furchen von einander getrennt; die ganze Stirnregion wieder ist von den übrigen Theilen des Cephalothorax durch eine starke Vertiefung abgesondert, welche besonders kräftig hinter den vier dornförmigen

* Contributo alla fauna carcinologica del pliocen italiano. I crostacei fossili di Monte Mario [Atti, soc. Tosc. d. sc. nat. Vol. XI. Tav. I. Fig. 26—28.] Pisa. 1889.

Lappen (rostrum) ist, da hier die Oberfläche sehr stark eingedrückt erscheint, so dass diese Lappen nicht nur nach vorne, sondern auch nach oben gerichtet sind. Unter den einzelnen Regionen tritt allein nur die Cardiacalregion scharf hervor, schon viel schwächer begrenzt ist die Urogastralregion. Unter den Furchen der Oberfläche sind jene am stärksten, welche die Cardiacalregion umgeben, etwas schwächer sind jene, welche die Urogastralregion von der Branchialregion trennen. Die Epigastralregion wird von den zahnförmigen Fortsätzen des Stirnrandes durch die bereits erwähnte breite Furche abgesondert. Die scharf begrenzte Cardiacalregion ist rundlich, an die Glandula uropigii der Vögel erinnernd stark erhaben, bildet eine der am meisten hervortretenden Partien des Cephalothorax, welche besonders auf dem von der Mitte ein wenig vorwärts geschobenen Gipfel mit grossen runden Tuberkeln verziert ist. Die Gastralregion ist von den übrigen Regionen nicht getrennt, nur die hintere, angeschwollene und den höchsten Punkt der Oberfläche bildende, mit grossen Tuberkeln versehene Urogastralregion ist rückwärts von der Cardiacalregion durch eine starke Furche getrennt und durch schwache Furchen von der Branchialregion, während die übrigen Theile der Gastralregion eine, nach vorne fallende, beinahe flache Oberfläche bilden und an den Seiten von keinerlei Furchen begrenzt sind. Die Gastralregion ist vorne gegen die Stirnregion nur insofern abgegrenzt, dass sich die vorderen vier Lappen der letzteren plötzlich nach oben biegen, somit hier die Oberfläche brechen und eine breite Furche entstehen lassen, deren Fortsetzung jene schmale Furche bildet, welche die Gastral- und theilweise die Branchialregion von den zwei hinteren Lappen des Stirnrandes trennt. Auf der Branchialregion zeigen Erhöhungen, welche mit grösseren Tuberkeln geziert sind, die Epi- und Mesobranchialregion an, im übrigen sind jedoch die einzelnen Theile der Branchialregion nicht abgesondert. Auch die Gastralregion ist von der Epibranchialregion nicht getrennt, da jedoch letztere in einem ziemlich starken Höcker endigt, erscheint sie doch gegen die flache Gastralregion einigermaassen abgegrenzt. Die Oberfläche des Cephalothorax ist rauh, da sie mit runden Tuberkeln von verschiedener Grösse bedeckt ist (Fig. 1*e*). Diese Höcker sind auf höheren Stellen grösser.

Nur der Cephalothorax des Thieres ist bekannt, somit kann von den übrigen Theilen seines Körpers nicht gesprochen werden. Wenn die in Budapest-Rákos aufgesammelten Gliedmaassentheile, welche ich unter Fragezeichen als *Lamprus* bezeichnete, da sie unter den bis dahin bekannt gewesenen fossilen Gattungen am ehesten hier eingereiht werden konnten, der *Andorina* angehören, so kann gesagt werden, dass sie auffallend lange Extremitäten hatte, worunter wenigstens die Scherenfüsse mit, in spärlichen Reihen stehenden hakigen Dornen geziert waren.

Länge des Cephalothorax von der Spitze der mittleren Dornen gemessen 9 mm und die grösste Breite des Cephalothorax 8 mm.

Die *Andorina* weicht schon zufolge der Bildung ihres Stirnrandes von allen ihren fossilen und lebenden Verwandten ab. So weicht die Form des Rostrums und der Augenhöhle der lebenden Gattungen *Chorilia*, *Hyas*, *Scyra*, *Eurypodius*, *Oregonia* etc. von jener der *Andorina* in solchem Maasse ab, dass jeder Vergleich überflüssig wird, da jedermann auf den ersten Blick die gerechtfertigte Selbständigkeit der Gattung erkennt.

Fundort: Der hier beschriebene einzige, kleine Cephalothorax stammt aus dem Leithakalk, aus demselben alveolinenreichen lockeren Kalkstein, welcher auch in Rákos aufgeschlossen ist und welcher die meisten Formen der Rákoser reichen Decapodenfauna lieferte. Hier kommen in Gesellschaft von *Andorina elegans* die gut erhaltenen Schalen von *Alveolina melo F. u. M.*, *Alveolina Haueri d'Orb.*, *Pecten (Vola) Leythajanus Partsch*, *Pecten (Vola) aduncus Eichw.*, ausserdem als vorherrschende Formen die Steinkerne von *Panopaea Menardi Desh.* und *Cardium hians Brocc.* vor. Die oberen Mediterran- und Sarmatenschichten, welche in Budapest bis dahin nur in Rákos aufgeschlossen waren, wurden im Sommer des Jahres 1898 in der Gegend des Ludoviceums bei Legung des Wassersammelcanals aufgeschlossen. Diese kleine neue Krabbe sammelte bei Abgrabung des Wassersammelcanals der Telepigasse Universitäts-Assistent Herr Gustav Moesz, derzeit Oberrealschulprofessor zu Brassó und schenkte sie mir, wofür ich ihm auch an dieser Stelle Dank sage.

Darányia nov. gen.

Die heute reiche Familie der *Catometopidae* wurde im Alttertiär durch wenige Gattungen vertreten, wovon auch nur die Gattungen: *Goniocypoda M. Edw.*, *Galenopsis*, *M. Edw.*, *Palaeograpsus Bittn.* und *Coeloma*, *M. Edw.* in den älteren Tertiärbildungen unseres Vaterlandes vorkommen. In der Beschreibung der überaus reichen Fauna des Kis-Sváhegy bemerkte ich, dass mit den beschriebenen dreissig Arten die Fauna dieses Fundortes bei weitem noch nicht erschöpft sei, sondern noch mehrere unbestimmbare Exemplare vorhanden seien. So befindet sich unter Anderen eine, in ihrem Äussern und auch bezüglich der Entwicklung der Regionen an die Gattung *Palaeograpsus* erinnernde Form, deren hinterer Seitenrand mit vier, gegen die Ventralseite fortwährend wachsenden starken Dornen geziert ist und von welcher ich sage: „Diese mangelhafte Form macht ganz den Eindruck einer neuen Gattung.“ Seither gelang es mir, ein besser erhaltenes, jedoch noch immer mangelhaftes Exemplar aufzusammeln, worauf schon mehr Charaktere sichtbar sind. Das schönste Exemplar befindet sich im Museum der Geologischen Anstalt. Auf Grund dieses Exemplars wurde es klar, dass hier thatsächlich eine neue Gattung vorliege und dass der Seitenrand nicht in einen hinteren und vorderen zerfällt und dass derselbe in seiner ganzen Ausdehnung mit sieben gegen die Ventralseite stetig wachsenden Dornen geziert ist. Diese Form stimmt mit keiner einzigen fossilen oder lebenden überein. Der äusseren Form und Zähnelung der Seitenränder nach erinnert sie an die im Mittelländischen Meere lebende Art: *Euchirograpsus Lucasi M. Edw.*, steht jedoch durch die Entwicklung des Stirntheiles und durch scharfe Begrenzung der Regionen auf dem Cephalothorax von derselben weit entfernt. Vermöge der Entwicklung der Stirnregion erinnert meine Form wieder an die bei Australien lebende Art *Helice crassa*, *Dana*, weicht aber von derselben in allen andern Theilen ab.

Diese neue Gattung benenne ich *Darányia* zu Ehren eines der Schöpfer des neuen Palastes der Geologischen Anstalt, Sr. Excellenz dem kgl. ung. Ackerbauminister Herrn Dr. Ignátz Darányi de Puszta-Szentgyörgy et Tetétlen.

Darányia granulata nov. sp.

[Taf. I, Fig. 3*a*—3*c*.]

1900. *Darányia granulata nov. sp.* Lörenthey. Andorina és Darányia két új ráknem Magyarországból. [Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. No. V. P. 836. Tab. III. Fig. 3*a*—3*d*.]

Der viereckige Cephalothorax wird gegen rückwärts allmählich schmäler und ist um weniges breiter als lang. Am breitesten ist er den vorderen Dornen der Seitenränder entlang, das ist am Frontalrande. Er ist in der Richtung so des Breiten- als Längedurchmessers schwach convex, am meisten auf jenem Halbkreise, welcher die Fortsetzung der ersten Dornen des Seitenrandes bildet. Von diesem Halbkreis, welcher durch die vordere Gastralregion geht, gegen rückwärts ist die Oberfläche des Cephalothorax schwach convex, während sie nach vorne plötzlich abfällt, so dass sich das Stirntheil schief vorwärts beugt und schwach concav ist. Der Saum des Stirnrandes besteht in der Mitte aus zwei breiten Loben, welche — insofern sie sichtbar — glatt und schwach gegen die Ventralseite gezogen sind. Der wenig convexe Saum der zwei Loben des Frontalrandes geht unvermerkt in einen concaven Bogen über, welcher sich bis zur Spitze der vorderen Dornen des Seitenrandes erstreckt. Somit ist der Vorderrand in Form eines S gebogen. Wahrscheinlich lagen in diesem schwach concaven Theil die langgestielten Augen. Die beiden Seitenränder sind gerade und mit sieben von rückwärts gegen vorne stets wachsenden, mit den Spitzen gegen die Ventralseite gerichteten Dornen geziert. Der Hinterrand, welcher gegen seine beiden Enden für die Extremitäten im Halbkreise stark ausgeschnitten ist, wird von einer schmalen glatten erhöhten Leiste begrenzt. Die ganze Oberfläche, ja selbst die umgeschlagene Partie der Branchialregion ist mit kleinen Tuberkeln besät, worauf sich auch der Name *granulata* bezieht. Die Regionen der Oberfläche sind von einander kaum geschieden, indem nur die viereckige Cardiacalregion von kaum wahrnehmbaren breiten Furchen begrenzt wird. Theilweise ist auch noch die Urogastralregion begrenzt, jedoch nur hinten, und diese Furchen sind auch schwächer als jene, welche die Cardiacalregion umgeben. Zwischen den von vorne gezählten zweiten und dritten dornförmigen Fortsätzen der Seitenränder

geht eine Furche aus, welche die vordere Branchialregion und den vorderen Theil der Urogastralregion durchzieht und gegen hinten durch eine schwach erhöhte Kante begrenzt ist. Mit derselben parallel geht auch vom vierten Dorn ein flacher, durch zwei schwache Furchen begrenzter Kiel aus, welcher jedoch nicht den ganzen Cephalothorax durchläuft, sondern von beiden Seiten ausgehend sich bis zu jener Kante erstreckt, welche die Cardiacal- und Urogastralregionen von einander scheidet und hier endigt.

Trotzdem, dass gut entwickelte Furchen fehlen und somit nichts vorhanden ist, was die Oberfläche des Cephalothorax in Regionen theilen würde, sind doch auf Grund von Vertiefungen und stellenweisen Anschwellungen der Oberfläche die Hauptregionen zu erkennen. Jene ziemlich tiefe Furche, welche den Frontalrand in zwei Theile theilt, thut dasselbe auch mit der Epigastralregion. Jeder dieser beiden Theile endigt gegen vorne in je zwei tuberkelförmig erhöhten Fortsätzen, worunter der in der Mittellinie liegende Epigastralfortsatz schon auf der concaven Frontalpartie liegt, das tuberkelförmig erhöhte Ende seines gegen die Hepaticalregion gekehrten Theiles jedoch auf der am meisten convexen Partie des Cephalothorax sich befindet. Die Gastralregion wird auch gegen die Hepaticalregion durch eine schwache Furche abgegrenzt. Die Cardiacalregion ist am besten begrenzt, nicht als wäre sie etwa von einer starken, tiefen Furche umgeben, sondern weil der neben der Cardiacalregion befindliche Theil der Branchialregion schwach angeschwollen und die Cardiacalregion vorne mit zwei kleinen Tuberkeln versehen ist. Die Furche der Branchiocardiacal-Region ist — obzwar breit — nicht genügend sichtbar. In dieser Furche befinden sich übrigens auch noch vier lochförmige Vertiefungen, den vier Spitzen der Cardiacalregion entsprechend. Die Partie zwischen der Cardiacalregion und dem Hinterrand ist schwach concav.

Maasse des Exemplars der Geologischen Anstalt:

Grösste Breite:	22 mm.
Länge:	18 „
Länge der Seitenränder: . .	15 „
Länge des Hinterrandes: . .	17 „.

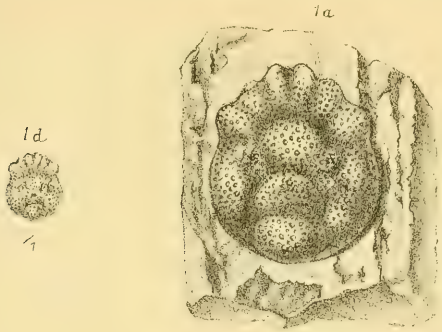
Fundort: Am Kis-Svábhegy bei Budapest fand ich schon vor Jahren in dem unter dem Orbitoidkalk liegenden, kleine Foraminiferen und Lithothamnien führenden Kalkstein zwei mangelhafte Cephalothoraxe, auf welchen die Charaktere nicht zu bestimmen waren; so viel sah ich jedoch, dass sie in keine bisher bekannte Gattung einzutheilen sind, jetzt aber, da ich in dem von der Geologischen Anstalt bekommenen reichen Material das hier abgebildete Exemplar fand, stellte sich die Selbständigkeit der Gattung heraus und somit ist die Zahl der aus dem Kis-Svábegyer Obereocenkalk bekannten Gattungen auf 19, die der Arten auf 34 gestiegen.

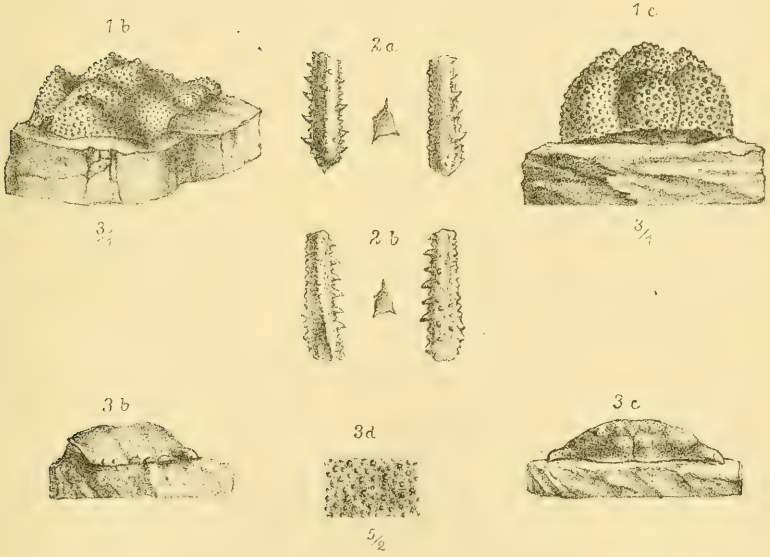
Erklärung der Tafel.

Fig. 1. *Andorina n. g. elegans nov. sp.* Aus dem losen Kalkstein der oberen Mediterranstufe des Wassersammelcanals der Telepigasse zu Budapest. 1*a*) von oben, 1*b*) von der Seite, 1*c*) von rückwärts gesehen. 1*d*) natürliche Grösse, 1*e*) vergrösserte Oberfläche. Nach den Zeichnungen des Geologen Herrn Aurél Liffa.

Fig. 2. *Andorina n. g.? elegans nov. sp.?* Gliedmaassen aus dem losen Kalkstein der oberen Mediterranstufe von Budapest-Rákos.

Fig. 3. *Darányia n. g. granulata nov. sp.* Aus dem gelblichen, lithothammienreichen, kleine Foraminiferen führenden Kalkstein des Kis-Svábhegy bei Budapest. 3*a*) von oben, 3*b*) von der Seite, 3*c*) von vorne gesehen und 3*d*) vergrösserte Oberfläche.





A. Swoboda n. d. Nat. gez. u. lith.

Lith. Anst. v. Alb. Berger Wien VIII.

Lörenthey. Andorina und Daránya.

SITZUNGSBERICHTE.

In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften lasen die nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten (anschliefsend an pp. 320—326 des XVI. Bandes dieser Berichte).

Sitzung den 16. Januar 1899.

1. Emerich Steindl c. M. (Antrittsvortrag): „Über das neue Parlamentsgebäude in Budapest."
2. Paul Plósz c. M.: „Fettbildung aus Kohlenhydraten."
3. Carl Laufenauer c. M.: „Die Histologie der Haematohydrose."
4. Carl Schaffer: Über die Structur des hinteren Bandes des Rückenmarkes." Vorgelegt durch das c. M. Carl Laufenauer.
5. Ludwig Hajós: „Zur Histologie der Epilepsie." Vorgelegt durch denselben.
6. Paul Ranschburg: „Zur Psychologie der hysterischen motorischen Lähmungen. Vorgelegt durch denselben.
7. Desider Korda: „Der Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleistungsfähigkeit des Eisens." Vorgelegt durch das o. M. Alois Schuller.

Sitzung den 13. Februar 1899.

1. Adolf Ónodi c. M.: „Über das Centrum der menschlichen Tonbildung."
2. Rudolf v. Fabinyi c. M.: „Über die 'Ceraeidine' genannten neuen Färbstoffe."
3. Paul Plósz c. M.: „Fettbildung aus Kohlenhydraten." (2. Mittheilung.)
4. Rudolf v. Kövesligethy c. M.: Bericht über sein „Handbuch der astronomischen und mathematischen Geographie" betiteltes Werk.
5. Julius Sóbányi: Vorangehender Bericht über seine hydrographische Studienreise. Vorgelegt durch das c. M. Ludwig v. Lóczy.
6. Carl Zimányi: „Beiträge zur Kenntniss des Dognácskaer rosenfarbenen Aragonites." Vorgelegt durch das o. M. Joseph Krenner.

Sitzung den 13. März 1899.

1. Moritz Hoór: „Neue Methode zur Bestimmung der Rutschung der Inductionsmotoren mit wechselndem Strome." Vorgelegt durch das o. M.

Isidor Fröhlich. Rutschung des Inductionsmotors (englisch slip) ist das Verhältniss der Zahl der Polwechsel des Generators pro Minute zu jener Zahl, welcher die Umdrehungszahl des inducierten Systemes entspricht. Dieses Verhältniss kann man durch $\frac{p_1}{p_2}$ bezeichnen. Die zur Bestimmung dieser Rutschung bisher angewendeten Methoden sind theilweise ihrer falschen Grundlage wegen unverlässlich, theilweise aber schwerfällig. Zu verlässlichen Daten können wir nur durch das Messen der Differenz $p_1 - p_2$ gelangen. Diese kann man mittelst zweier Methoden bestimmen, und zwar entweder durch stroboskopische Messung, oder durch Zählen des Stromstosses von Minute zu Minute. Vortragender machte mit beiden Methoden Versuche, von denen aber sich bloss die zweite als verlässlich erwies. Bei der Ausführung der Messung verursachte der Einfluss der Widerstände der Leitungen, der Verbindungen und des Strommessers Schwierigkeiten, jedoch half Vortragender diesem Übel damit ab, dass er die Stromstösse nicht direct durch die inducierten dazwischengeschalteten Strommesser, sondern durch Hilfe jener Inductionswirkung beobachtete, welche das durch den pulsierenden Strom gebildete Feld in einer vielläufigen und im Feld entsprechend angebrachten Rolle ausübt. An den Enden der Rolle brachte Vortragender ein Telephon an, durch dessen Hilfe er 400—500 Stromstösse zählte. Statt dem Telephon können auch andere Apparate, z. B. das Rollensystem des Weston'schen Voltmeters, der Spiegelelectrodynamometer, angewendet werden.

2. Jakob Hegyfoki: „Die Vertheilung des Niederschlages in den einzelnen Tageszeiten." Vorgelegt durch das o. M. August Heller.

3. Georg Csorba: „Zur Theorie der additiven Behandlung der ganzen Zahlen."

Sitzung den 17. April 1899.

1. Anton Genersich c. M. (Antrittsvortrag): „Über die Bauchfellcysten." Man kann im Allgemeinen zweierlei Bauchfellcysten unterscheiden, nämlich Cysten hinter dem Bauchfell und Cysten im Gekröse. Was aber den Inhalt und das Wesen der Bauchfellcysten betrifft, so stammen diese entweder von Parasyten oder von Erkrankungen her. Von den ersteren sind der Echinococcus und der Cysticercus nennenswerth. Der Echinococcus besteht aus einer faserigen Bindehauthülle und darinnen aus einer fremdartig chitinigen, vielblätterigen Cyste, die in unversehrtem Zustand reines Serum und kleinere Bläschen enthält. Er kann an irgendwelcher Stelle des Bauchfelles vorkommen und eine beträchtliche Grösse erreichen. Viel kleiner und von klinischem Standpunkt unbeträchtlicher ist der Cysticercus.

Die von Erkrankungen herrührenden Bauchfellcysten können in die folgenden Classen eingetheilt werden: 1. Ectodermalcysten, welche sich aus der Hornplatte entwickeln und Hautcysten sind (Dermoide, Teratomen,

Inclusio foetalis); 2. Entodermalcysten aus der Darmdrüsenplatte; 3. Mesodermalcysten, die aus den Lymphwegen stammen.

Von den Ectodermalcysten ist vor Allem die Inclusio foetalis zu nennen. Diese ist von der Litteratur bisher unrichtig behandelt worden, da man die bigerminalis inclusio foetalis abdominalis, also das eigentliche foetus in foetu von den complicierten Dermoidcysten nicht recht unterschied. Bei ersterem ist in der Cyste immer ein verkümmerter, überflüssiger Bestandtheil des Foetus enthalten, z. B. ein Knochen oder ein Organ. Von den Dermoiden oder Teratomen sind die am nennenswerthesten, welche vom Schwanzwirbel oder vom Kreuz ausgehen und, in die Höhlung des kleinen Beckens hineinwachsend, um den Mastdarm oder die Blase, im Weibe um die Scheide sich festsetzen. Der Ursprung der Teratomen kann nur durch Voraussetzung der Implantation erklärt werden.

Von den Entodermalcysten ist das Vorkommen von grösseren Urachuscysten beim Menschen bisher noch nicht erwiesen, doch kann aus gewissen Symptomen das Vorhandensein solcher mit einiger Wahrscheinlichkeit festgestellt werden. Die zur selben Classe gehörenden Darmcysten (Enterocysta oder Enterokystoma) stammen meistens von der ordnungswidrigen Entwickelung oder Rückentwickelung des Darms her, andere aus dem Wurmfortsatz, oder auch aus näher nicht zu bestimmenden Einschnürungen. Ausser den bisher erwähnten giebt es auch solche Entodermalcysten, deren Ursprung nicht erwiesen werden kann. Neueren Untersuchungen zufolge können solche Cysten durch die Verirrung einer Lungenablagerung in den Bauchraum entstehen.

2. Moritz Staub c. M. (Antrittsvortrag): „Das Cinnamomum Genus aus der urweltlichen Flora."
3. Wilhelm Hankó c. M. (Antrittsvortrag): „Über die Schwankung der Zusammensetzung der Mineralwässer." Die Zusammensetzung der Mineralwässer ändert sich desto weniger, eine je grössere Temperatur sie haben, da die wärmeren, also tiefer entspringenden Wässer den äusseren Wirkungen weniger ausgesetzt sind. Zur Beurtheilung der Veränderung der Zusammensetzung ungarischer Mineralwässer stehen nicht viel Daten zur Verfügung, da hiezu nur von den fremden Wirkungen abgeschlossene Quellen dienen können. Als interessante Beispiele führt Vortragender die Luher Margit-Quelle und die Trinkquelle des Ofener Kaiserbades an. Bei der Untersuchung der letzteren war eine grosse Schwankung des Carbonylsulfidgehaltes infolge des Luftdruckes zu constatieren.
4. Wilhelm Hankó c. M. und Johann Gáspár: „Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens." Die wichtigste Aufgabe dieser Abhandlung war, festzusetzen, ob die in der letzten Zeit verbreitete Ansicht, dass der Klebergehalt des ungarischen Weizens allmälig im Abnehmen ist, berechtigt ist. Die beiden Verfasser untersuchten 71 Weizengattungen, darunter 61 ungarische, und kamen zu dem Resultat, dass der Klebergehalt seit den letzten 30 Jahren nicht nur nicht abgenommen,

sondern sogar zugenommen hat, während der böhmische, rumänische und amerikanische Weizen zwar hie und da den Klebergehalt des ungarischen erreicht, doch ihn nie überschreitet.

5. Wilhelm Schulek c. M.: a) „Schutzgläser gegen das ultraviolette Licht, auf Grund von Studien über Lichtwirkung.“ — b) „Die Lichtabsorption durchsichtiger gelber Stoffe.“
6. Gustav Rados c. M.: „Zur Theorie der algebraischen Resolventen.“
7. Alexander Mocsáry c. M.: „Die Neuropteren Ungarns.“
8. Ferdinand Filarszky: „Pflanzenmorphologie.“ Vorgelegt durch das c. M. Alexander Mágocsy-Dietz.
9. Johann Gáspár: „Beiträge zur Chemie des Klebers.“ Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Hankó. Nach den Untersuchungen Ritthausen's besteht der „Weizenkleber“ aus vier selbständigen Proteïnkörpern, nämlich dem Gluten-Caseïn, Gluten-Fibrin, Gliadin und Mucedin. Vortragender versuchte den Weizenkleber auf dieselbe Weise zu zersetzen, und überzeugte sich, dass die durch Ritthausen gewonnenen vier Proteïnstoffe keine selbständigen Körper sind. Der Umstand, durch welchen Ritthausen's Irrthum erklärt werden kann, ist, dass das durch fermentische Wirkung sich entwickelnde Zersetzungsproduct des Proteïnstoffes hauptsächlich Ammoniak und die Verschiedenheit des Feuchtigkeitsgehaltes eine verschiedene Löslichkeit im Alkohol verursacht.

Vortragender stellte ferner aus einer Lösung von entwässertem und entfettetem Kleber und Salzsäure salzsäurigen Kleber in der Form eines weissen Pulvers dar. Auf ganz ähnliche Weise gewann er fluorsäurigen Kleber. Indem er bei der Lösung des Klebers in den beiden erwähnten Halogensäuren Platinchlorid dazu gab, gewann er in beiden Fällen ein gelblichrothes Platinsalz. Nach zweistündigem Erhitzen gewann Vortragender aus dem in 24 percentiger Salzsäure gelösten Kleber eine schwärzliche Lösung und eine dunkelbraune Ausscheidung, welche nach der Filtrierung zurückblieb.

Sitzung den 15. Mai 1899.

1. Paul Stäckel: „Die Theorie der imaginären Zahlen in den nachgelassenen Schriften Johannes v. Bolyai's. Vorgelegt durch das o. M. Julius König.
2. Andreas Högyes o. M.: a) „Die Statistik des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1898.“ — b) „Neuere Beiträge zur Frage des reflexen Zusammenhanges des Hör- und Sehorganes.“
3. Wilhelm Schulek c. M.: „Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre.“

Sitzung den 19. Juni 1899.

1. Johannes Gáspár: „Die chemische Untersuchung des Weizenklebers.“ Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Hankó.

2. Wilhelm Schulek c. M.: „Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre.“ (2. Mittheilung.) Vortragender befasste sich seit einer Reihe von Jahren mit der Frage, ob das Licht von seinem ultravioletten Gehalt befreit werden kann, bevor es in das Auge tritt. Es ist nämlich durch Widmark und Ogneff erwiesen worden, dass das ultraviolette Licht dem Auge sehr schädlich ist. Nach langen Untersuchungen fand er auch Stoffe, die zur Lösung dieser Anfgabe geeignet sind, und unter denen das Triphenylmethan in Xylol am besten entspricht. Mineralstoffe können nicht verwendet werden.

   Eine andere Frage war die Absorption durchsichtiger gelber Stoffe. Diesbezüglich untersuchte Vortragender 24 solche Stoffe mit dem Spectroscop und fand, dass von dem violetten Ende des Spectrums ein Stück gänzlich fehlte, während der übrige Theil des Spectrums bis zum rothen Ende sehr geschwächt war.

   Die wichtigste Frage war aber, welche Augengläser schützen das Auge am besten gegen die ultravioletten Strahlen. Diese Frage ist um so wichtiger, als Vortragender erfuhr, dass der Altersstaar in den meisten Fällen vom ultravioletten Licht herrührt. Die allgemein benützten gelben und rauchfarbigen oder rothe und blaue Augengläser entsprechen daher nicht. Gut zu verwenden sind die durch Vortragenden verfertigten Kammerbrillen, die aus doppelten Linsen, dazwischen mit einer 2,5 mm dicken Schichte von Triphenylmethan in Xylol aufgelöst bestehen.

3. Emil Grósz: „Die von der Wirbelsäulenschwindsucht herrührende Blindheit.“ Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Schulek. Vortragender befasste sich vier Jahre lang mit dieser Frage und untersuchte während dieser Zeit die Augen von 200 an der genannten Krankheit leidenden Personen. Die Erkrankung beginnt mit dem Grauwerden des Sehnervkopfes, ist progressiver Natur und führt früher oder später zur totalen Erblindung. Der Hauptsitz der Krankheit muss an den zur Peripherie näher gelegenen Theilen gesucht werden, da immer diese Theile am meisten zerstört werden. Wenn wir als Ausgangspunkt der Krankheit die Ganglionzellenschichte annehmen, so können wir erklären, warum die Schwindsucht gegen das Gehirn zu abnimmt und bei den Hirnganglien, am Ende des Neuron, aufhört. Die Schwindsucht des Sehnerves kann nur als eine coordinierte Erscheinung der Entartung des Rückenmarkes aufgefasst werden, und wird wahrscheinlich durch Blutgefässe vermittelt.

4. Ludwig Schlesinger: „Das Gauss'sche Pentagramma mirificum.“ Vorgelegt durch das o. M. Julius König.

5. Eugen Klupáthy: „Kathodstrahlen in nicht homogenem und magnetischem Rotationsraum.“ Vorgelegt durch das o. M. Isidor Fröhlich. Wenn wir ein Kathodstrahlenbündel in einen magnetischen Rotationsraum versetzen und den Raum in der Richtung der Strahlen verschieben, so zeigt die Bewegung des Endpunktes der Strahlen verschiedene Übergänge, je nachdem die Axe des Raumes und die Strahlen parallel oder senkrecht sind. Dieses

auffallende Verhalten der Kathodenstrahlen konnte der Verfasser mit der von Sir William Thomson herrührenden Emissionstheorie anfangs nicht in Einklang bringen, sah aber später darin nur die Bekräftigung ber Theorie. Wenn nämlich die Axe des Raumes mit dem Strahlenbündel parallel ist, rührt die bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit eintretende, scheinbar entgegengesetzte Drehung von der stroboskopischen Wirkung her und hängt mit der intermittierenden Eigenschaft der Kathodenstrahlen zusammen. Ist der Raum zum Strahlenbündel senkrecht, so beschreibt der Endpunkt des Strahlenbündels, wenn wir den Raum zu sich selbst parallel verschieben, einen Kreis und geht dann, sich in entgegengesetzter Richtung bewegend, in eine Ellipse und bald darauf in einen Kreis über. Interessant sind auch die Versuche mit einem magnetischen Hufeisen.

6. Tiburtius Györy: „Morbus Hungaricus.“ Vorgelegt durch das c. M. Carl v. Kétly.

7. Arthur Hasenfeld: „Auf welche Art wird die Funktion des an überwuchernden Klappenfehler leidenden Herzen durch die fette (phosphorige) Entartung der Muskulatur beeinflufst.“ Vorgelegt durch das c. M. Árpád v. Bókay.

8. Franz Tangl: „Ein Beitrag zur Kenntniss des Energiegehaltes der menschlichen Nierenausscheidung.“ Vorgelegt durch denselben. — Die Resultate der Untersuchungen können im Folgenden zusammengefafst werden: Die Quotienten des Urins $\frac{Cal}{N}$ und $\frac{C}{N}$, sind dann viel gröfser, wenn die Kohlenhydrate überwiegend sind, als dann, wenn der grösste Theil der Nahrung aus Fett besteht. Die Qualität der Nahrung beeinflusst also den Werth dieser Quotienten. Neben den erwähnten Bedingungen geht die Veränderung der beiden Quotienten immer in derselben Richtung vor sich. Bei Muskelarbeit ändert sich keiner der Quotienten.

Sitzung den 16. Oktober 1899.

1. August Heller o. M. legt seinen Bericht vor über die am 11.—13. Oktober 1898 in London gehaltene internationale Conferenz für einen math.-naturwiss. Katalog.

2. Eugen v. Daday c. M.: „Freilebende Nematoden aus Neu-Guinea.“

3. Rudolf v. Kövesligethy c. M.: „Von der Axendrehung der Fixsterne.“

4. Emerich Szarvasy: „Die Darstellung der Induline auf electrolytischem Weg.“ Vorgelegt durch das c. M. Ludwig v. Ilosvay. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit elektrolysierte salzsäueriges Anilin und dann eine Mischung von salzsaurem Anilin und Anilin. Bei der Elektrolyse brachte das sich ausscheidende Chlor Azoverbindungen zu Stande, welche dann mit der Mischung von salzsaurem Anilin und Anilin so reagierten, dass sich zuerst Azophenin, dann aber Indulinfarben bildeten.

Sitzung den 20. November 1899.

1. Ludwig Thanhoffer o. M.: a) „Die Lage des Herzens im Körper.“ — b) Ein neues Hilfsmittel zur Untersuchung des Zusammenhaltens der Zellen.“
2. Adolf Ónodi c. M.: a) „Zur Kenntnis der Nebenhöhlen der Nase.“ — b) „Die Chorea laryngis.“
3. Eugen Daday c. M.: „Entomostraceen und Hydrachniden aus Neu-Guinea.“
4. Wilhelm Schulek c. M. legt den I. Band seines „Ungarische Beiträge zur Augenheilkunde“ betitelten Werkes vor.

Sitzung den 18. Dezember 1899.

1. Anton Abt: „Über die thermo-elektromotorische Kraft der Metalloxide und Metallsulphide.“ Vorgelegt durch das o. M. Isidor Fröhlich.
2. Aladár Richter: „Zur Physiologie der Luftwurzeln.“ Vorgelegt durch das o. M. Julius Klein.
3. Victor Szépligeti: „Braceniden aus Neu-Guinea.“ Vorgelegt durch das c. M. Alexander Mocsáry.

EROEFFNUNGSREDE DES PRAESIDENTEN ROLAND BARON EÖTVÖS.

(Gehalten in der Festsitzung vom 7. Mai 1899.)

Die Institution der Akademien hat, wie jedes Institut, welches Auszeichnungen verleiht, auch seine Gegner.

„Es ist eine Institution, behaupten diese, welche den Anforderungen der Gegenwart nicht mehr entspricht, und deshalb auch nicht in unsere Zeit passt.“ Solche Aeusserungen hören wir sehr oft, nicht nur von der Menge, welche den Werth der wissenschaftlichen Thätigkeit danach bemisst, in welchem Maasse es ihr materiellen Wohlstand oder wenigstens geistigen Genuss verschafft, sondern auch von ernsten Gelehrten, die im Bewusstsein ihrer eigenen Kraft nicht auf andere anstehen, sich darum auch nicht um andere kümmern und ihre verschlossenen wissenschaftlichen Kreise in selbstsüchtiger Eifersucht behüten.

Der Geist der Verneinung, welcher alles bestehende zu vernichten bestrebt ist, wendet seine Waffen auch schon gegen die Akademien, und offenbart sich bei uns, so wie in ganz Europa weniger in offenen Angriffen als in der viel gefährlicheren Form von verkleinernden Urtheilen und tadelnden Bemerkungen.

Ist dieser offene oder verborgene Angriff berechtigt? Haben die Akademien noch ein Bestandrecht? Diese Fragen will ich mit einigen Worten beleuchten.

Wenn wir die Stimme der Pietät zum Schweigen bringen, welche viele von uns auch heute an die Erhaltung der Schöpfungen unserer Vorfahren mahnt, und, die Sache vom Standpunkte der nüchternen Vernunft betrachtet einer Institution nur in dem Maasse ein Bestandrecht zuschreiben, in welchem es den Anforderungen der Gegenwart entspricht, können wir in voller Objectivität die Frage so aufstellen: Ist, bei der heutigen Entwickelung der Wissenschaften und bei den heute zur Fortbildung der Wissenschaften zu Gebot stehenden Institution noch eine solche Unterstützung und Vereinigung der wissenschaftlichen Thätigkeit der Einzelnen, wie sie die Institution der Akademien anstrebt, durchaus noch nöthig.

Wenn ich die Frage erschöpfen wollte, müsste ich eine ganze Geschichte schreiben, um zu entwickeln, was die Akademien in der Kulturgeschichte

der Menschheit waren und zu was sie geworden sind. Ich will mich aber bemühen, die Sache kurz darzulegen.

Ich will nicht lange im anmuthigen Garten des alten Athen verweilen, in dessen schattigen Hainen zwischen den Meisterwerken der Bildhauerkunst ein Plato mit seinen Jüngern wandelte, und welcher den Namen „Akademie" den vielen hunderten von Institutionen der folgenden Jahrhunderte, welche die Gelehrten, Künstler, Liebhaber der Kunst und Wissenschaft zu einem gemeinsamen Wirken oder geistigen Genusse vereinigten, als Erbtheil liess. Ich werde auch nicht erörtern, ob der Name Akademie in dem heutigen Sinne des Wortes, allen diesen von einander sehr verschiedenen Institutionen, welche im Alterthum und Mittelalter der Wanderung der Kultur folgend in immer neuen Mittelpunkten der Kultur sich entwickelten, und diesen Namen führten, gebührt.

Von viel grösserer Bedeutung, als diese alten Zeiten mit ihren vergangenen Schöpfungen, ist für unsere Frage die Mitte des XVII. Jahrhunderts, wo der Geist der Vereinigung Institute schuf, deren Einfluss auf die Entwickelung der Wissenschaft ununterbrochen bis in unsere Tage reicht.

In dieser grossen Zeit, welcher ein Galilei voranging, und ein Newton folgte, damals, als der wissbegierige Mensch befreit von der Herrschaft der alten Autoritäten sich mit seinen Fragen an die Natur selbst wandte, von der er so viel zu fragen hatte, damals gelangte die Vereinigung der ein gemeinsames Wirken unternehmenden Kräfte zu neuer Bedeutung.

In einem kurzen Jahrzehnte entstanden nach einander die Accademia del Cimento in Florenz, die Royal Society in London und die Pariser Akademie.

Die Accademia del Cimento, welche unter fürstlicher Gunst schnell aufblühte und nach deren Entziehung nach zehnjährigem Bestande sich auflöste, zeigte ein so ideales Beispiel der auf ein gemeinsames Ziel gerichteten gemeinsamen Wirksamkeit, wie wir es in der Geschichte der menschlichen Bestrebungen nur selten und in der Geschichte der Wissenschaften überhaupt nicht finden. Ihre Mitglieder haben sich, ihre eigene Individualität ausser Acht lassend, zu einem einzigen wissenschaftlichen Individium vereinigt, und das Ergebniss ihrer Wirksamkeit steht heute so vor uns, wie die Schöpfung eines einzigen gewaltigen Geistes. Jener werthvolle Band, welcher diese Ergebnisse in sich schliesst, ist im Jahre 1607 erschienen und nennt als Autoren nur die Akademie, verschweigend die Namen derer, die dazu beigetragen haben, so dass heute der Geschichtsschreiber der Wissenschaft kaum mehr zu bestimmen weiss, wer daran betheiligt ist. Betrachten wir die wissenschaftlichen Aufgaben, welche diese Gesellschaft sich vorlegte, so ist bemerkenswerth, dass sich die meisten auf die Messung der Temperatur, des Druckes, und der Dichtigkeit, dass heisst auf solche Fragen beziehen, deren Lösung die plangemässe Vereinigung der Thätigkeit der Gelehrten bis in unsere Tage immer von neuem nothwendig machte.

Neben der Geschichte der kurzlebigen Accademia del Cimento, spricht auch der Entwickelungsgang der Royal Society und der Pariser Akademie.

besonders in den ersten Jahren ihres Bestehens, von der Kraft des Vereinigungsgeistes.

Diese verlangten zwar von ihren Mitgliedern keine solche Aufopferung ihrer Individualität, lieferten aber durch die Grossartigkeit ihrer Resultate einen noch glänzenderen Beweis der Nützlichkeit des vereinten Wirkens. Ihr Wirken, an welchem Huyghens, Newton, Leibniz als Führer theilnahmen, bezog sich hauptsächlich auf die Fragen der Physik der Erde. Die Form und die Dimensionen unserer Erde, die Schwerkraft, das Phänomen der Ebbe und Fluth gaben vielen scharfen Denkern, vielen geschickten Beobachtern gemeinsam zu schaffen.

Diese Thätigkeit erreichte ihren Höhepunkt und der Geist der wissenschaftlichen Vereinigung feierte einen Triumphtag, als die Pariser Akademie beschloss, dass sie, um die streitigen Fragen über die Form der Erde aufzuklären, ihre Gelehrten, eines Theils nach Lappland, anderes Theils nach Peru sende, um die Länge eines Meridiangrades zu messen, und dass dieser Beschluss zur That wurde. Maupertuis, Clairaut, Camus und Lemonnier dem Froste des Nordens, Godin, Bouguer und Lacondamine aber der brennenden Hitze des Südens trotzend, gingen auf diese Argonautenfahrt, um die Wahrheit vom Aequator bis zu den Polen zu suchen.

Ich würde gegen die Triumphe meines eigenen Wissenschaftsfaches befangen erscheinen, wenn ich unter den glänzenden Beispielen der vereinigten wissenschaftlichen Thätigkeit, die gerade in der Zeitfolge erste, jene planmässige Thätigkeit der Mitglieder der Accademia della Crusca nicht erwähnte, durch welche sie ihre Sprache reinigen wollten, oder, wie ihr Wappen und Titel andeuten, die Kleie aus deren Mehl ausscheiden wollten und als Ergebnisss ihrer sorgfältigen und beständigen Arbeit ihr vom Standpunkte des litterarischen Geschmackes und der Sprachwissenschaft gleich wichtiges Wörterbuch herausgaben.

Wer aber richtig beobachten will, muss die Dinge von mehreren Seiten, von der Licht- und Schattenseite betrachten. Wer aus dem bisher gesagten übereilt folgern wollte, dass die Wissenschaft nur, oder grösstenteils nur durch Vereinigung der Kräfte fortschreiten kann, und dass die Akademien keine andere Aufgabe haben, als diese Vereinigung zu vermitteln, würde sehr fehlen. Denn obgleich es sicher ist, dass die Vereinigung in der wissenschaftlichen Arbeit, so wie in jeder menschlichen Thätigkeit einen nicht nur moralischen, sondern auch praktischen Nutzen hat, besonders dann, wenn sie im Interesse einer Unternehmung zu Stande kommt, welche die Kräfte des Einzelnen überschreitet, so kann die Vereinigung für sich kein Ziel sein, sie kann sogar schädlich sein, sobald sie die freie Entwickelung des Individuums verhindert.

Das alte Märchen spricht von einem Vater, der auf seinem Sterbebette seine Söhne versammelte und ihnen einen Pfeil in die Hand gab, sie sollen ihn zerbrechen, und nachdem sie dies mit Leichtigkeit vollendeten, ihnen seinen mit Pfeilen gefüllten Köcher reichte, an dem die Knaben ihre Kraft

fruchtlos erprobten. Der Vater, der dadurch seine Söhne an das Zusammenhalten mahnen wollte, hatte darin auch recht; hundert Pfeile widerstehen jener Kraft, welche im Stande ist jeden einzeln zu zerbrechen, aber um seine Warnung zu vervollständigen, hätte er noch dazusetzen können, dass der Pfeil nicht bestimmt ist, um sich im Köcher zwischen den Anderen kräftig zu fühlen, sondern, dass er ausgeschossen durch seine lebendige Kraft frei jenem Ziele zufliegt, für das er bestimmt ist.

Dieser freie Flug, diese Ausscheidung des Individuums von seinen Gefährten, in der jeder einzelne durch seine eigene Kraft sein Ziel erreichen kann, giebt auch dem Gelehrten die Fähigkeit seine Bestimmung zu erreichen.

Die Akademien hätten der Wissenschaft nicht gedient, wenn sie durch Uebertreibung der Gemeinsamkeit des Wirkens die Entfaltung der wissenschaftlichen Individualität verhindert hätten. Sie haben es nicht gethan, sie haben sogar durch ihre Preisfragen Verhandlungen und durch bei der Wahl ihrer Mitglieder ausgesprochene Urtheile, den Wettbewerb auch auf das Gebiet des geistigen Kampfes übertragen.

In jenem Zeitalter, auf welches ich hingewiesen habe, im XVII. Jahrhundert, waren die Akademien so zu sagen die einzigen Institute, welche die Unterstützung des wissenschaftlichen Fortschrittes für ihre Pflicht hielten.

Sie blieben aber nicht lange allein. Im Verlaufe der Zeit fing der alte Stamm, welchen die Menschheit noch in den Urzeiten pflanzte, damit er den Wissenschaften Blüthen und Früchte bringe, neue Aeste zu treiben.

Ich meine die Schule, im höheren Sinne des Wortes, oder wie wir sie heute nennen, die Universität, welche viele Jahrhunderte hindurch ihre hohe Bestimmung verfehlte und statt die Wissenschaften selbst zu pflegen, sich mit der minderen Rolle des Commentators der Wissenschaft begnügte, welche aber im vorigen und noch mehr in unserem Jahrhundert unter den wissenschaftlichen Gesellschaften den ihr gebührenden besonderen Platz wieder einnahm.

Heute folgt die Universität jenem Grundsatze, dass die Wissenschaft Anderen mittheilen nur derjenige kann, der selbst im Stande ist sie zu fördern, und zieht beinahe alle Gelehrten in ihren Wirkungskreis, versieht sie mit allen Mitteln, indem sie ihnen nur jenen Auftrag giebt, dass sie lehren nach ihrer eigenen Ueberzeugung, verschafft ihnen alles, dass sie ihre Individualität in den wissenschaftlichen Forschungen frei entwickeln und sich aus ihren Schülern Nachfolger bilden können. Können wir uns wundern, dass heute in der freien Atmosphäre der Universität das wissenschaftliche Leben am schönsten blüht?

Wenn wir betrachten und uns darüber freuen, welchen Aufschwung die Universitäten neben jenem Werke, welches sie durch den Unterricht im Interesse der Kultur vollbringen, besonders seit dem Anfange unseres Jahrhunderts dem Fortschritte der Wissenschaft gegeben haben, entsteht leicht die Frage: ob neben ihnen auch noch heute die Akademien nötig sind?

Wir müssen antworten; sie sind nötig, — denn die Universitäten vereinigen zwar in sich alle Zweige der Wissenschaft, sie schaffen auch zwischen ihnen gewisse Anknüpfungen, sie können aber mit ihren in der ganzen gebildeten Welt zerstreuten Residenzen die Pfleger der einzelnen Wissenschaftsfächer nicht einander näher bringen. Jede Universität ist bestrebt in sich ein Ganzes zu bilden, jede sorgt sich nur um ihre eigenen Schüler und Professoren, versieht sie mit Bibliotheken, Sammlungen und Laboratorien, mit einem Wort, mit allen Hülfsmitteln der Wissenschaft; wie die Mitglieder ihrer Corporation aber die Erfolge ihrer Forschungen auch ausser den Wänden des Lehrsaales verwerthen, lassen sie einzig und allein auf seine eigene Einsicht.

So stellt die Universität nur, so zu sagen, gut geschulte und gut ausgerüstete Arbeiter auf das Feld der Wissenschaft, die Akademie aber bleibt auch dieser Arbeiterschaar gegenüber das, was sie früher war, der Arbeitgeber, der für die Früchte der Arbeit belohnt, und wenn es nöthig ist, der Führer der Arbeit, der die zerstreuten Kräfte zu gemeinsamen grossen Aufgaben vereinigt.

Auf solche Art schliefsen sich Universität und Akademie nicht aus, sondern ergänzen einander.

Die Nothwendigkeit der Vereinigung der wissenschaftlichen Kräfte war nie so fühlbar wie heute. Jene hunderte und tausende, welche besonders, seit der Neubelebung der Universitäten das Feld der Wissenschaft nach allen Richtungen durchforschten, bezeichneten durch ihre Entdeckungen immer neue und neue Gebiete, welche der Bearbeitung warten.

Während die Entdeckung selbst immer nur das Resultat des glücklichen Gedankenganges eines Einzigen ist, überschreiten die auf dessen Grund zu lösenden Aufgaben sehr häufig die Kräfte des Einzelnen, und bedürfen des Zusammenwirkens von mehreren.

In dieser schnelllaufenden Zeit der Entdeckungen genügen die Akademien nicht mehr, sind nicht mehr reich genug, um alle diesbezüglichen Arbeiten in sich zu verrichten.

Ist die Wissenschaft aufgeblüht und in weiten Kreisen verbreitet, so hört auch die Fortbildung derselben auf, die Privatsache einzelner Auserwählter zu sein, sie wird eine gemeinsame Sache, gegen die der Staat und die Gesellschaft Verpflichtungen auf sich nehmen.

Neben den alten entstehen demnach neue Institutionen.

Die Staaten errichten zur Ergründung einzelner wissenschaftlicher Fragen selbständige, reich ausgestattete Institute, und zwar nicht nur im Interesse der praktischen Verwerthung, sondern im Interesse der Wissenschaft selbst. Einen glänzenden Beweis liefern dafür das Pariser Bureau de poids et mesures und die Potsdamer Physikalische Reichsanstalt, welche jährlich über viele tausende verfügen, um die Temperatur um den tausendsten Theil, oder die Dichte des Wassers um den hundertmillionsten Theil eines Grades genau bekannt zu machen.

Verwöhnte Kinder unserer Zeit sind auch die wissenschaftlichen Wandersitzungen oder Congresse. Auch diese wirken heute in der Erfüllung vieler wisssenschaftlicher Aufgaben, welche die Kräfte der Einzelnen überschreiten, mit, indem sie zwischen den Gelehrten gewisse gesellschaftliche Beziehungen und internationale Berührungen ermöglichen.

Obwohl diese neueren Vereinigungen, dem Geiste unserer Zeit entsprechend, mehr demokratisch gesinnt sind, und in ihren Kreis jeden Arbeiter gerne aufnehmen, ohne in Betracht zu ziehen, ob er die Feuerprobe der akademischen Wahl, oder den Wettbewerb der Universität ausgehalten hatte, so stellen sie sich den alten Instituten doch nicht gegenüber, sondern folgen ihrer Bestimmung mit ihnen gemeinsam und auf sie gestützt.

Darum, weil sie als Pfleger der Wissenschaft nicht mehr allein stehen, haben die Akademien nicht an Bedeutung verloren, sie sind nicht überflüssig geworden.

In meinen Erörterungen war ich bestrebt, jene Umstände in wahrem Lichte zu schildern, auf deren einseitige Auffassung der Feind seine Angriffe gründet.

Ausser den bisher erwähnten habe ich noch ein Argument, welches viel überzeugender ist als alle andern. Damit wende ich mich an Sie, an die Mitglieder der ungarischen Akademie, an die wahren Freunde der ungarischen Wissenschaft.

Die Akademien sind nicht nur wissenschaftliche, sondern auch nationale Institutionen. Nationale Institutionen insofern, als sie die Sprache und Litteratur, die Geschichte, die Volkswirthschaft unserer Nation oder deren gesellschaftliche und Naturverhältnisse zum Gegenstande ihrer Forschung machen; nationale Institutionen sind sie auch deshalb, weil sie in ihrer Wirksamkeit die wissenschaftlichen Bestrebungen einer Nation zum Ausdruck bringen, und unter deren Fahne auf dem wissenschaftlichen Schauplatze der Welt erscheinen. Wir müssen nicht glauben, dass dies nur die Eigenthümlichkeit unserer Akademie ist und dass diese derselben beraubt den anderen Akademieen ähnlicher, im Range vornehmer würde. Legen wir lieber darüber Rechnung ab, dass der Ruhm, den diese Akademie erringen kann, nur der Ruhm der ungarischen Wissenschaft sein kann, und dass wir nicht einen Moment vergessen sollen, dass wir das Erbe unseres Begründers nur dann treu bewahren, wenn wir unsere nationale Aufgabe erfüllen, indem wir entwickeln, wie er selbst sagte: „die verborgenen, noch nicht ausgebildeten und zur Reife nicht gelangten Eigenthümlichkeiten der ungarischen Nation und hiedurch die Welt um eine Nation bereichern".

Stärker als jede andere Begründung sichert dies das Existenzrecht unserer Akademie!

Und hiermit eröffne ich die neunundfünfzigste Gesammtsitzung der ungarischen Akademie der Wissenschaften.

JAHRESBERICHT DES GENERALSECRETÄRS COLOMAN VON SZILY.

Unsere Akademie hielt im vorigen Jahre 44 Sitzungen, unter anderen auch eine ausserordentlich traurige Sitzung, durch welche die Akademie ihre tiefe Trauer ausdrückte. Mit Dankbarkeit und Pietät gedachte sie der hochherzigen Königin, welche die ungarische Sprache und Litteratur aufrichtig liebte, auch unter ihren Kindern beliebt machte und die in diesem Gebäude ihren Kranz auf die Bahre Franz Deák's legte. In derselben Sitzung beschloss unsere Akademie, diese Scene durch eine Gedenktafel aus weissem Marmor zu verewigen. Die Kosten dieser Gedenktafel sind durch die Gaben der Mitglieder der Akademie, der Kisfaludy-Gesellschaft und der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft in kurzer Zeit zusammengekommen, und der Directionsrath betraute Herrn Prof. Alois Strobl mit der Durchführung derselben. So können wir hoffen, dass das Werk in wenigen Jahren fertig sein wird und den Nachkommen auch im Heim der Wissenschaft verkünden wird, wie nahe diese grosse Königin dem Herzen der ungarischen Nation gestanden ist.

Die einzelnen Classen hielten im Jahre 1898 25 öffentliche Sitzungen.

Die Vorträge der I. Classe vertheilten sich gleichmässig auf das Gebiet der Litteratur und Kunst einerseits und auf die Sprachwissenschaften anderseits; grösstentheils bezogen sie sich aber auf nationale Gegenstände.

Classen-Präs. und ord. Mitgl. Karl Szász beendigte im vorigen Jahre sein Werk von 20 Jahren, die Uebersetzung von Dante's „Divina Commedia", ord. Mitgl. P. Emil Thewrewk trug einmal über die Frage des Rhythmus, ein anderesmal über die ungarische Uebersetzung von Homer vor. Grosses Aufsehen erregte die Entdeckung eines 15 zeiligen altungarischen Textes vom Anfange des XIV. Jahrhunderts durch Elemér Varjú, welches jetzt das zweitälteste ungarische Sprachdenkmal ist. Vorträge hielten noch Ehren-Mitgl. Maurus Jókai, ordl. Mitgl. Anton Bartal, corr. Mitgl. Gedeon Petz, Johann Melich, Ludwig Dézsi, corr. Mitgl. Friedrich Riedl, corr. Mitgl. Stephan Hegedüs und Eduard Mahler.

In der II. Classe waren die Vorträge geschichtlichen Inhalts überwiegend. Heinrich Marczali hielt über Dalmatien und die Könige des Árpádenhauses einen Vortrag, welchen er auch dem internationlen historischen Congresse

vorlegte. Ausserdem hielten noch Vorträge: corr. Mitgl. Gabriel Téglás über die ältesten geographischen Angaben über Dacien bei Herodot, ord. Mitgl. Florian Mátyás über die Ungarn im IX. Jahrhundert, Wilhelm Fraknói, Andreas Veress und Andreas Komáromy.

Über socialwissenschaftliche Gegenstände trugen die corr. Mitgl. Joseph Körösi und ord. Mitgl. Joseph Jekelfalussy vor.

Die in der III. mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe gehaltenen Vorträge und Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten erwähnt.

An den litterarischen Feierlichkeiten, welche zur Erinnerung einzelner hervorragender Männer in verschiedenen Theilen des Landes gehalten wurden, nahm die Akademie auch durch ihre Vertreter Theil.

In der Ausgabe der Akademie erschienen im vorigen Jahre 34 Werke, von denen wir nur einige erwähnen: es erschien der VIII. Band der Korrespondenz Karinczy's, die Tagebücher und der Briefwechsel des grossen altungarischen Schriftstellers Albert Szenczi Molnár, herausgegeben von Ludwig Dézsi, der II. Band aus dem Material der Gesetzvorlage des Kriminalrechtes aus dem Jahre 1843 von Ludwig Fayer. Árpád Hellebrant vollendete das grosse bibliographische Werk unseres verstorbenen Mitgliedes Karl Szabó, welches Facsimilen der Titelblätter der von Ungarn und Ungarländern bis 1711 erschienenen Werke enthält.

Mit Dankbarkeit und Pietät erinnern wir uns der Wohlthäter der Akademie. B. Albert Wodianer machte eine Stiftung von 25 000 Gulden für bestimmte Zwecke, die Vereinigte Budapester Sparkasse setzte einen Preis von 4000 Gulden aus, Dir. u. Ehrenmitgl. Anton Zichy hinterliess sein Budapester Wohnhaus der Akademie, Ehrenmitgl. Balthasar Horvát vermachte 1000 Gulden. Durch ein von litteraturgeschichtlichem Standpunkte sehr werthvolles Geschenk bereicherte Ladislaus Arany unsere Handschriftensammlung, indem er uns die Briefe mehrerer ungarischer Dichter und Schriftsteller schenkte. Herr Andreas Szirmay machte das einzige Exemplar des Gesetzbuches von König Mathias zum Geschenk. Dir. u. Ehrenmitgl. Ernst Hollán schenkte neun an ihn gerichtete Briefe von Stephan Széchenyi dem Széchenyi-Museum.

Unsere Akademie hat seit der letzten Festsitzung viele Mitglieder durch den Tod verloren.

Von den Directionsmitgliedern starben: gr. Georg Apponyi, Ehrenmitgl. und Präsident der I. Classe Anton Zichy.

Von den Ehrenmitgliedern verloren wir ausser Anton Zichy noch Balthasar Horvát, den Reformator des ungarischen Justizwesens.

Von den ordentl. Mitgliedern: Iván Nagy und Alexander Szilágyi.

Von den corresp. Mitgliedern starben: Iván Télfy, der grosse Freund des Neuhellenismus; Stephan Bartalus, der grosse Kenner der ungarischen Musikgeschichte; Albert Bielz, Béla Szász, der Übersetzer von Longfellow und Stuart Mill und Ladislaus Arany.

Von den auswärtigen Mitgliedern verloren wir: den grossen englischen Staatsmann Wilhelm Gladstone, den Egyptologen Georg Ebers, Alfons Huber, der die Geschichte unseres Vaterlandes dem Auslande in unverfälschtem Lichte zeigte, Friedrich Müller, Karl Knies, Franz Hauer, den Director der Kais. Geologischen Anstalt, der sich auch durch die Erforschung der Geologie von Siebenbürgen Verdienste erwarb und den in Budapest gebürtigen Orientalisten Wilhelm Leitner.

Meinen Bericht will ich mit einer Erinnerung beenden.

Vierzig Jahre sind es, dass in der Festsitzung des Jahres 1859 der damalige Präsident der Akademie die begeisternden Worte sprach: „In Ungarn hat die Wissenschaft keine Heimstätte, ist die Akademie nicht werth, dass wir ihr eine verschaffen?“ Die Akademie verlangte nur ein einfaches Haus, die Nation errichtete aber einen Palast und vermehrte zugleich das Grundcapital der Akademie. Nie war die Akademie so volksthümlich als damals, weil sie die Wissenschaft volksthümlich machte. Heute ist sie aus der Gunst der Menge gefallen, weil behauptet wird, dass sie die Wissenschaft nicht popularisiert. Die das behaupten, vergessen, dass sie jährlich 30—35 000 fl. an verschiedene Vereine vertheilt, damit sie die Wissenschaft in ungarischer Sprache popularisieren. Wahr ist, das sie selbst als Akademie nichts dafür thut, sie soll aber auch nichts thun, denn in jedem Lande hat die Wissenschaft eine Stätte, wo sie nicht um ihres praktischen Nutzens, sondern um ihrer selbst willen betrieben wird. Das soll die Akademie auch in Ungarn sein.

A. Vermögen der Akademie am 31. Dezember 1898.

I. Activum.

1.	Werthpapiere der Akademie insgesammt	1 665 502 fl.	12 kr.
2.	Gebäude der Akademie, Einrichtung, Bibliothek . .	1 000 000 „	— „
3.	Aeussere Stiftungen, Fonds, Immobilien	69 869 „	33 „
4.	Rückständige Interessen	559 „	72 „
5.	Verschiedene Forderungen der Akademie	85 843 „	91 „
6.	Im Vorhinein für 1899 bezahlte Gebühren	2 857 „	99 „
7.	Ausstehende Vorschüsse	1 211 „	99 „
8.	Hauszinsrückstände	91 „	04 „

II. Passivum.

1.	Die von der Akademie verwalteten Fonds	154 093 „	44 „
2.	Verschiedene Forderungen	40 714 „	12 „
3.	Im Vorhinein bezahlte Hausmiethe welche für 1899 gehört	1 743 „	37 „
4.	Vermögen der Akademie am 1. Januar 1898	2 613 297 „	59 „
5.	Reiner Gewinn des Jahres 1898	16 087 „	58

B. Einnahmen der Akademie im Jahre 1898.

1.	Interessen von Stiftungen und anderen Fonds . . .	6 161 fl. 70 kr.
2.	Ertrag der Werthpapiere	64 410 „ 24 „
3.	Hausmiethe	41 820 „ 50 „
4.	Erlös verkaufter Bücher	10 000 „ — „
5.	Landessubvention	40 000 „ — „
6.	Immobilien	723 „ 35 „
7.	Legate und Spenden	6 249 „ 12 „
8.	Einzahlung der ungarischen Kaufmannshalle . . .	160 „ — „
9.	Beitrag der archäologischen und anthropologischen Gesellschaft	525 „ — „
10.	Cursdifferenzen	2 250 „ — „
11.	Aus der Kazinczystiftung	2 182 „ 40 „
12.	Rückerstattung von den Classen	5 440 „ 18 „
13.	Zur Subventionierung des türkisch-ungarischen Wörterbuches	500 „ — „
14.	Mehreinnahme bei einem ausgelosten Loos von 1860	80 „ — „
15.	Mehreinnahme beim Pacsérer Gut	7 019 „ 30 „

C. Ausgaben der Akademie im Jahre 1898.

1.	Personalbezüge	32 860 „ 77 „
2.	Anzeiger, Almanach u. s. w.	4 427 „ 66 „
3.	I. Classe und deren Commissionen	18 038 „ 45 „
4.	II. „ „ „ „	24 063 „ 56 „
5.	III. „ „ „ „	15 240 „ 88 „
6.	Unterstützung von Büchereditions-Unternehmungen	3 000 „ — „
7.	Graf Széchenyi-Museum	497 „ 99 „
7 a.	Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's	2 182 „ 40 „
7 b.	Szinnyei: Biographien der ungarischen Schriftsteller	1 200 „ — „
8.	Preise	9 696 „ 80 „
9.	Budapesti Szemle (Budapester Revue)	4 000 „ — „
10.	Für ausländische Publicationen über ungarische Literatur	654 „ — „
11.	Pränumeration an die „Math. Naturw. Berichte“ .	1 500 „ — „
12.	Bibliothek	6 497 „ 02 „
13.	Instandhaltung der Gebäude, Heizung etc.	9 818 „ 15 „
14.	Vermischte Ausgaben	5 064 „ 62 „
15.	Steuer	16 584 „ 72 „
16.	Interessen aus den von der Akademie verwalteten Fonds	2 729 „ 47 „
17.	Unvorhergesehene Ausgaben	990 „ 43 „

18.	Rückerstattung an das Grundcapital	3 200 fl. — kr.
19.	Abschreibung des Vorschusses eines verstorbenen Mitgliedes	740 „ — „

D. Voranschlag für 1899.

Einnahmen.

1.	Interessen der Stiftungen	2 700 „ — „
2.	Forderungen	3 500 „ — „
3.	Ertrag der Werthpapiere	66 000 „ — „
4.	Ertrag der Immobilien	— „ — „
5.	Hausmiethe	39 000 „ — „
6.	Erlös verkaufter Bücher	9 500 „ — „
7.	Landessubvention	40 000 „ — „
8.	Ausserordentliche und durchlaufende Einnahmen .	13 131 „ 09 „

Ausgaben.

1.	Personalbezüge	28 564 „ 20 „
2.	Allgemeine Ausgaben (Anzeiger, Almanach etc.) .	4 500 „ — „
3.	I. Classe und deren Commissionen	20 139 „ 73 „
4.	II. „ „ „ „	34 647 „ 34 „
5.	III. „ „ „ „	16 379 „ 82 „
6.	Unterstützung von Bücherediti ons-Unternehmungen	4 000 „ — „
7.	Graf Széchenyi-Museum	1 000 „ — „
7 a.	Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's	3 000 „ — „
7 b.	Szinnyei: Biographien der ung. Schriftsteller . . .	1 200 „ — „
8.	Preise	1 000 „ — „
9.	Budapesti-Szemle (Budapester Revue)	2 000 „ — „
10.	Für ausländische Publicationen über ungarische Literatur	1 600 „ — „
11.	Pränumeration auf die „Math. Naturwiss. Berichte“	1 500 „ — „
12.	Bibliothek	6 500 „ — „
13.	Instandhaltung der Gebäude. Heizung etc.	7 400 „ — „
14.	Vermischte Ausgaben	5 000 „ — „
15.	Steuer	16 500 „ — „
16.	Interessen aus den von der Akademie verwalteten Fonds	3 000 „ — „
17.	Rückerstattung an das Grundcapital	1 800 „ — „
18.	Unvorhergesehene Ausgaben	3 000 „ — „
		174 331 fl. 09 kr.
	Vermehrung des Grundcapitals	1 500 „ — „

Am 1. Jänner 1899 hatte die Akademie insgesammt 231 Mitglieder, von denen 18 Ehrenmitglieder, 56 ordentliche, und 134 correspondierende Mitglieder waren. Der Directionsrath bestand aus 23 Mitgliedern.

Die Mitglieder vertheilten sich folgender Weise auf die drei Classen:

Die I. (Sprach- und schönwissenschaftliche) Classe hatte 5 Ehren-, 12 ordentliche- und 28 correspondierende Mitglieder.

Die II. (philosophisch-historische) Classe, 6 Ehren-, 22 ordentliche und 54 correspondierende Mitglieder.

Die III. (mathematisch-naturwiss.) Classe, 7 Ehren-, 22 ordentliche und 52 correspondierende Mitglieder.

Bibliothek.

Die Anzahl der geordneten Fachwissenschaften war 53; diese enthielten 56 995 Werke.

Darunter: Anthropologie 314, Mathematik und Astronomie 1097, Naturwissenschaft 177, Physik 939, Chemie 416, Naturgeschichte 129, Zoologie 491, Botanik 427, Mineralogie und Geologie 512, Medicin, Anatomie, Physiologie 2483.

Der Fachkatalog besteht aus 102 Bänden und 48 Zettelkapseln.

Zunahme der Bibliothek im Jahre 1898.

a. Durch Kauf	385	Werke
b. Durch Tauschverkehr mit auswärtigen Akademien	524	„
c. Pflichtexemplare von 356 Druckereien	6 925	„
d. Geschenke von Privatpersonen	39	„
e. Eigene Ausgaben	27	„
Summe der gesammten Zunahme	7 900	

Dazu kommen noch 125 Stück Schulprogramme und 112 ausländische Zeitschriften.

Den Lesesaal der Bibliothek besuchten 6959 Leser, welche 9012 Werke benützten. Es wurden 687 Stück Eintrittskarten ausgegeben. 1479 Werke waren ausgeliehen.

Die Preisausschreibungen der Mathem.-Naturw. Classe.

a. Neue Preise. Semsey-Stiftung: Gegenstand: 1. Die Geologie Ungarns, und zwar: die Entwickelung der Kenntnis der Geologie Ungarns, die Oro- und Hydrographie, endlich die ausführliche Geologie. — 2. Die wissenschaftliche Beschreibung der in Ungarn vorkommenden Mineralien, mit Benützung der diesbezüglichen in- und ausländischen Literatur. — 3. Die Flora Ungarns. Die Morphologie aller in Ungarn vorkommenden Pflanzen, mit besonderer Rücksicht auf diejenigen, welche charakteristisch sind. Die geographische Verbreitung der einzelnen Arten. — 4. Die Fauna Ungarns. Systematische Bearbeitung aller in Ungarn vorkommenden Thierarten, mit Aufzählung der über diesen Gegenstand erschienenen Werke. — Den Preis für jedes einzelne dieser Werke bilden 10 000 Gulden.

Johann Forster-Stiftung. Gegenstand: Die national-ökonomische und landwirthschaftliche Bedeutung der Zucht und Veredlung der Samen landwirthschaftlicher Pflanzen, sowie die biologischen und wirthschaftlichen Bedingungen, von denen der Erfolg der Zucht abhängt. Preis 1500 Gulden.

b. Wiederholt ausgeschriebene Preise.

Welche Rolle spielen die Wasserstrassen unter den Verkehrsmitteln, mit besonderer Rücksicht auf unsere heimathlichen Verhältnisse. Preis aus Andreas Fáy Stiftung der Pester ersten Sparkassa 3000 Gulden.

ZUR ERINNERUNG AN GÉZA VON MIHALKOVICS.

Géza von Mihalkovics, ordentlicher Professor der Anatomie und Director des I. Anatomischen Institutes der Universität Budapest, wurde mitten im rastlosen Schaffen am 12. Juli 1899 im Alter von 55 Jahren von einem heimtückischen Leiden dahingerafft. In dem Verstorbenen verliert die Wissenschaft in Ungarn, der sein rastloser Fleiss und sein Streben vor allem gegolten hat, einen ihrer tüchtigsten Vertreter, und mit seinem Vaterlande trauert die ganze wissenschaftliche Welt an seiner Bahre; denn seine wissenschaftliche Thätigkeit war weit über die Grenzen Ungarns bekannt und gewürdigt worden.

Über den Lebenslauf des Verstorbenen können wir das folgende berichten. Géza von Mihalkovics wurde zu Budapest als der Sohn eines Rechtsanwaltes am 31. Januar 1844 geboren, er besuchte das Gymnasium in seiner Vaterstadt und bezog im Jahre 1863 daselbst die Universität, wo er sich dem medizinischen Studium widmete und sich hauptsächlich mit Anatomie befasste. Schon als Student besass er eine besondere Geschicklichkeit in der Herstellung anatomischer Präparate und wir finden auch jetzt in der Sammlung des Institutes Präparate, welche mit seinem Namen versehen sind.

Schon als Mediziner gewann er zwei Preise; er schrieb ein anatomisches Werk, welches mit einem Preis ausgezeichnet wurde und zu welchem er vorzügliche Präparate verfertigte; später, im Jahre 1868 verfasste er eine chirurgische Verbandslehre, mit welcher er den zweiten Preis gewann und welche auch im Druck erschien. Während seiner Studienzeit wählte ihn Professor Lenhossék wegen seiner grossen Geschicklichkeit zum Demonstrator. Er betrachtete aber die Anatomie nur als Hilfswissenschaft, denn er wollte Chirurg werden und hatte schon damals die Erkenntnis, dass ein tüchtiger Chirurg auch ein tüchtiger Anatom sein muss. Um sein Wissen auf diesem Gebiete zu erweitern und zu vervollständigen, trat er im Jahre 1869, nachdem er seine Studien vollendet hatte, in das, unter der Leitung des Professors Joseph von Lenhossék stehende Anatomische Institut als Assistent ein, welche Stelle er bis zum Jahre 1871 bekleidete, und wo er während dieser Zeit eine rege litterarische Thätigkeit entwickelte. Im Jahre 1871 ging er zu seinem eigentlichen Fache, der Chirurgie über und wurde Operationszögling an der Klinik des Professors Kavács; doch wurde er durch äussere Umstände von seiner Bahn abgelenkt und dadurch, dass ihm Aussicht auf eine Anatomische Lehrkanzel geboten wurde, wieder der Anatomie zugeführt. Da

dem Charakter Mihalkovics's jede Unvollkommenheit ferne lag, und er bei allen seinen Studien seine volle Kraft einsetzte, so widmete er auch jetzt, wo er durch die Verhältnisse zur Anatomie bestimmt wurde, sein ganzes Wissen dem Studium der wissenschaftlichen Seite dieses Zweiges der ärztlichen Wissenschaft. Er trat 1872 eine Studienreise in das Ausland an, wo er zuerst in Wien unter der Leitung des Professor Toldts die Methoden der mikroskopischen Forschung studierte, und seine Arbeit über den Kamm des Vogelauges schrieb. Während des Sommersemesters 1873 arbeitete er an dem Ludwigsinstitut in Leipzig bei Professor Schwalbe, wo er die so oft citierte Arbeit über die Histologie des Hodens schrieb.

Die Jahre 1873—1875 brachte er an der Universität Strassburg zu; wo er an Professor Waldeyer, der seine Tüchtigkeit und Strebsamkeit sogleich erkannte, einen Gönner fand und durch dessen Vermittlung er, trotzdem er ein Ausländer war, nicht nur als I. Assistent angestellt wurde, sondern auch die Erlaubniss erhielt, sich an der Universität zu habilitieren. Dass Professor Waldeyer sich in der Beurtheilung seines Schützlings nicht irrte, beweisen die Worte, welche er an der Bahre Mihalkovics's, seinem einstigen Assistenten, widmete: „Sein früher Tod wird im ganzen Ungarlande tief betrauert und beklagt; aber auch weit über die Grenzen seiner Heimath hinaus, insbesondere in Deutschland und Italien, in welchen beiden Ländern Mihalkovics manchen Freund zählt, schmerzlich empfunden. Wir deutschen Anatomen haben allen Anlass, das Hinscheiden unseres ungarischen Collegen zu beklagen; ist er doch Deutschland in steter Hinneigung ergeben gewesen und hat die guten Beziehungen zwischen Deutschland und seinem Vaterlande, was an ihm lag, treu zu pflegen und zu fördern gesucht.“ Die Worte des grossen deutschen Gelehrten beweisen uns, wie Bedeutendes Mihalkovics als Fachgelehrter geleistet, und dass das, was er geschrieben hat, nicht nur für den fachmännischen Leserkreis seines Volkes, sondern für das höchste wissenschaftliche Forum der grossen Kulturvölker von Bedeutung war.

Auf Waldeyer's Anregung begann Mihalkovics sich mit Embryologie zu beschäftigen, welcher Richtung er bis zu seinem Lebensende treu blieb. In Strassburg schrieb er die Aufsätze über die Entwickelung der Chorda dorsalis, der Hypophyse, der Zirbeldrüse und der Augenlinse. Auch sein Hauptwerk, eine umfangreiche Monographie über die Entwickelung des Gehirns, welches seinen schriftstellerischen Ruhm begründete, schrieb er dort. Unterdessen wurde in Budapest eine Lehrkanzel für Embryologie errichtet, welche er 1875 betrat. Da aber bei der stets zunehmenden Frequenz der medizinischen Facultät diese eine Lehrkanzel nicht genügte, so wurde ihm im Jahre 1878 als zweite Lehraufgabe die topographische Anatomie zugetheilt und er zum Ordinarius befördert, indem man ihm gleichzeitig in dem eben fertiggestellten neuen Universitätsbau eine besondere Abtheilung für Anatomie einrichtete, welche 1882 als „II. Anatomische Anstalt“ zu einer zweiten vollständigen anatomischen Lehrkanzel ausgestaltet wurde.

Nach dem 1888 erfolgten Tode des Professors Joseph von Lenhossék wurde Mihalkovics mit der Leitung des I. Anatomischen Institutes betraut, während die II. von Professor Ludwig Thanhoffer übernommen wurde. Mihalkovics erwarb sich auch bei dem Bau des neuen Anatomischen Insitutes, welches nach seinen Angaben (1878—1896) gebaut und eingerichtet wurde, grosse Verdienste. Trotzdem er in dieser Zeit schon sehr schwer leidend war, widmete er sich mit grossem Eifer und hohem Ehrgeize dieser schweren Aufgabe; etwas vollendetes sollte hier entstehen. Im Januar 1899 übersiedelte Mihalkovics in sein neues Heim; die Einrichtung seines Institutes konnte er jedoch nicht mehr zu Ende führen, trotzdem er sich auch noch während seiner Krankheit durch fortwährende Correspondenz und Bestellungen damit beschäftigte. Einige Monate vor seinem Tode hatte er einen Vortrag für die Tübinger Versammlung der Anatomischen Gesellschaft, welche er regelmässig besuchte, angekündigt. Es war ihm aber nicht mehr vergönnt, das Ergebniss seiner Forschungen und die Erfahrungen, welche er sich beim Einrichten des neuen Anatomischen Institutes gesammelt hatte, seinen ausländischen Collegen mitzutheilen!

Mihalkovics war schon drei Jahre vor seinem Tode schwer krank, er litt an einem heftigen Blutbrechen, welchem er schon damals erlegen wäre, wenn nicht das energische Eingreifen eines tüchtigen Arztes, der mit einer Kochsalztransfusion nicht zögerte, dem Leiden Einhalt gethan hätte, nach welchem er sich allmählich erholte. Der früher so kräftige Mann schien aber seit dieser Zeit gebrochen, und wer ihn in den letzten Jahren sah, der konnte kaum daran zweifeln, dass er den Keim eines schweren, tödtlichen Leidens in sich trage. Die Diagnose lautete: Ulcus ventriculi rotundum. Trotz seines schweren körperlichen Leidens war er bis zuletzt wissenschaftlich thätig. Noch in den letzten Jahren, als man den tödtlichen Ausgang seines Leidens schon kannte, überraschte er seine Landsleute durch zwei neue, gross angelegte Handbücher, die beide, leider, unvollendet blieben. Die grossen Anstrengungen, welche mit der Installierung des neuen Anatomischen Institutes und der von ihm im letzten Jahre bekleideten Würde eines Rektors der Universität verbunden waren, und die die Stunden seiner amtlichen Thätigkeit stark vermehrten, wirkten auf seinen ohnehin schon sehr anämisch gewordenen Organismus verderblich. Vom Monat Mai an nahm seine Krankheit in solchem Maasse zu, dass er nur auf kurze Zeit das Bett verlassen konnte; und am 11. Juli morgens drei Uhr erlag er seinem Leiden unter den Erscheinungen einer akuten Peritonitis. Die Section ergab ein chronisches, zum grossen Theil vernarbtes und mit dem Pankreas verwachsenes Magengeschwür von ungewöhnlicher Grösse, auf dessen Grunde sich ein neuer Erweichungsherd gebildet hatte, der zu einer Perforation der Magenwand führte.

Mihalkovics genoss nicht nur in seinem Vaterlande, wo ihn die medizinische Fakultät für die Jahre 1892—1894 zu ihrem Dekan wählte, und er im Studienjahre 1888—1889 die Würde eines Rector magnificus inne

hatte, grosses Ansehen und grosse Verehrung, welche sich bei seinem Tode in ergreifender Weise kundgab, sondern er wurde auch ausserhalb der Grenzen Ungarns gekannt und gewürdigt, wie dies mehrere Kränze auswärtiger Fachgenossen und die vielen Beileidschreiben aus dem Auslande bewiesen. Sein gewesener Lehrer Professor Waldeyer war aus Berlin gekommen, um seinem einstmaligen Assistenten, dem er nicht nur Lehrer sondern auch Freund war, an der Bahre einen ergreifenden Nachruf zu widmen, und Professor Toldt legte den Kranz der Wiener medizinischen Fakultät persönlich auf den Sarg seines einstigen Schülers.

Mihalkovics war kein mittheilsamer, leicht zugänglicher Mensch, als Freund war er aber verlässlich und konnte mitunter auch recht warm werden; seine Freunde werden ihm gewiss ein treues, liebevolles Andenken weihen! Besonders stolz war er auf die Freundschaft, die ihn mit seinem einstigen Vorstand Professor Waldeyer verband. In seiner Gattin fand er eine treue Gefährtin, die seinen wissenschaftlichen Bestrebungen volles Verständnis entgegenbrachte und ihm stets eine verständige Mitarbeiterin war. Ihr hat auch sein letzter Blick, sein letzter Händedruck gegolten.

Mihalkovics's Hauptbestreben war, die Fortschritte der morphologischen Wissenschaften in allen ihren Theilen gewissenhaft zu verfolgen. Ein Zeugniss davon legen seine, in ungarischer Sprache verfassten, umfangreichen Lehrbücher ab, von welchen man besonders die vor seinem Tode veröffentlichte, Professor Waldeyer gewidmete, Allgemeine Embryologie (No. 24 des Verzeichnisses seiner Schriften) hervorheben muss, welche in jeder Zeile das tiefe fachmännische Wissen des Verfassers erkennen lässt, und welche mit einer solchen Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit gearbeitet ist, dass sie nicht nur für den naturgemäss beschränkten fachmännischen Leserkreis seines Vaterlandes, sondern für das höchste wissenschaftliche Forum der grossen Kulturvölker geschrieben ist. Besonderes Gewicht legt er darin auf die übersichtliche Gruppierung der Thatsachen und auf das Hervorheben der aus ihnen hervorgehenden allgemeinen Gesichtspunkte. Auch seine 1881 erschienene Allgemeine Histologie (9) und die 1888—1892 veröffentlichte zweibändige Anatomie (13 und 15) zeigen dieselbe Klarheit in der Darstellung. Als man ihn zur Herausgabe einer zweiten Auflage aufforderte, genügte es ihm nicht, die erste Auflage zu verbessern, er entschloss sich, ein neues Werk mit einer neuen Eintheilung des Stoffes zu schreiben, welches er aber leider nicht mehr vollenden konnte, es erschien bloss der erste Band des auf drei Bände berechneten, mit Abbildungen versehenen Werkes (23).

Auch als selbständiger Forscher gehörte Mihalkovics zu den Tüchtigsten seines Faches, die die Wissenschaft mit namhaften Beiträgen bereichern. Die geachtete Stellung, welche er sich durch seine Forschungen in der Wissenschaft errungen hat, wird ihm wohl bis über das Grab hinaus gesichert sein. Seine wissenschaftliche Vorbildung stand ganz auf der Grundlage deutscher Wissenschaft, und sein Denken und Trachten als Forscher folgte stets der Richtschnur der deutschen Gelehrsamkeit.

Die Grundlage zu seinen sicheren praktisch-anatomischen Kenntnissen hatte er sich als Assistent des Professors Joseph von Lenhossék angeeignet. Von seiner Fertigkeit und Geschicklichkeit auf diesem Gebiete zeigen die topographisch-anatomischen Ausführungnn in seinen Büchern und das Zeugniss, welches ihm Waldeyer (vgl. Anat. Anzeiger, Bd. XVI, S. 350) ausstellt, indem er sagt, er habe selten einen Assistenten gehabt, der das Scalpell so meisterhaft zu führen verstanden hat wie Mihalkonics.

Seine ersten Arbeiten bewegen sich auf dem Gebiete der Histologie, erst auf seiner Studienreise begann er sich mit der mikroskopischen Richtung der Anatomie zu beschäftigen. Vor allem interessierte ihn das Problem des Werdens der Formen, er beschäftigte sich mit grosser Vorliebe mit der Entwickelung des Lebens und dem unerschöpflichen Forschungsproblem der rastlos thätigen Natur, welches sich in der Entwickelung der Organe am allerdeutlichsten kundgiebt. Er hatte einen ganz besonderen Sinn für morphologische Verhältnisse und einen klaren Blick für die verwickelten Vorgänge der Formenbildung und dazu eine klare, logische Darstellungsgabe.

Die Erstlingsarbeit Mihalkovics's (1) befasst sich mit dem Kamme des Vogelauges. Er weist darin nach, dass das Organ bei dem erwachsenen Thiere mit der Chorioidea keinen directen Zusammenhang hat, da es von ihr durch die Retina abgeschnürt ist, und dass es auch seine reichen Blutgefässe nicht aus den Venen der Aderhaut, sondern aus deren Retina empfängt, trotzdem aber ist es sehr genau und klar entwickelt, dafs der Kamm in morphologischer Hinsicht als eine zum System der Uvea gehörige Bildung aufzufassen sei.

In seiner Arbeit über den Bau des Hodens (2) hebt Mihalkovics als neu hervor, dass der Hoden mit Rücksicht auf die vielen Anastomosen der gewundenen Kanälchen unter sich als netzförmige Drüse aufzufassen ist (wie dies auch Hyrtl in seiner topographischen Anatomie nachweist). In den geraden Kanälchen weist Mihalkovics ein gewöhnliches niedriges Cylinderepithel nach und stellt dadurch fest, dass sie nicht mehr zu dem secernierenden Theil des Hodens, sondern schon zu dessen Ausführwegen gehören, welche Ansicht von Van der Stricht, Hammar, Disselhorst, v. Lenhossék u. a. in den letzten Jahren bestätigt wurde.

In seinem Aufsatze: Anlage der Augenlinse (3) beweist Mihalkovics im Gegensatze zu der kurz vorher (1874) erschienenen Arbeit J. Arnold's, in welcher dieser beim Rindsembryo die Linse aus einer soliden Wucherung des Ectoderms entstehen liess, dass diese auch hier, nicht anders als beim Hühnchen, aus einer bläschenförmigen Anlage besteht.

Seine Arbeit „Wirbelsaite und Hirnanhang" (5) ist für die Entwickelung der Hypophyse grundlegend geworden. Alle Autoren bis Goette (1873) verlegten die Bildungsstätte der Hypophysentasche hinter die Anheftungsstelle der Rachenhaut. Goette war der erste, welcher, allerdings nur ganz kurz, nachwies, dass sie sich bei Amphibien vor dieser anlegt, folglich dem äusseren Keimblatte entstammt. Mihalkovics bestätigte nicht

nur diese Aussage, sondern wies sie auch bei Vögeln und Säugethieren nach, was später (1874) von Balfour für Selachier und von Köllicker (1876) für höhere Säugethiere bestätigt wurde. Viel citiert ist auch der in der Arbeit Mihalkovics's erwähnte Befund des Verhaltens der Chorda in der Schädelbildung beim Kaninchen und ihre Beziehungen zur Hypophysenanlage, sowie der Umstand, dass die Chorda während ihres Verlaufes in der knorpeligen Schädelbasis merkwürdige Anschwellungen zeigt, die an diejenigen in den Intervertebralscheiben erinnern.

Auch die Entwickelung der Zirbeldrüse (6) bei Vögeln und Säugethieren hat Mihalkovics als erster beobachtet.

Sein Werk über die Entwickelung des Gehirns, welches zwar erst 1877 erschienen ist, an welchem er aber schon zur Zeit seines ersten Aufenthaltes in Strassburg arbeitete, bietet die erste monographische Bearbeitung dieses Gegenstandes. Man darf dies Werk nicht vom Standpunkte unserer heutigen Kenntnisse beurtheilen; die Methoden der Untersuchungen sind heute durch das Heranziehen der vergleichenden embryologischen Forschung viel vollkommener als vor 25 Jahren; Mihalkovics konnte seine Untersuchungen nur an höheren Wirbelthieren anstellen und rein nur anatomische Zwecke verfolgen. Trotzdem finden wir in dem Werke genug des Grundlegenden, auch abgesehen von der Darstellung der Entwickelung von Hypophyse und Zirbel, die hier ausführlich wiederholt wird.

Um die Mitte der achtziger Jahre veröffentlichte Mihalkovics als das Ergebniss eines mehrjährigen Studiums seine Abhandlung über die Entwickelung des Urogenitalapparates der Amnioten (11).

Einige Jahre vor seinem Tode begann Mihalkovics sich mit einem neuen embryologischen Problem zu befassen, nämlich mit der Frage der Entwickelungsgeschichte der Nasenhöhle und ihrer pneumatischen Anhänge. Wahrscheinlich war er durch die Aufforderung, für Heymann's Handbuch der Laryngologie und Rhinologie das Kapitel „Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Nase" zu bearbeiten, dazu angeregt worden. Er begnügte sich nicht mit einer einfachen Zusammenstellung der schon bekannten Thatsachen, sondern ging mit vollem Eifer an die selbständige Erforschung des Gegenstandes. Seine Beobachtungen hat er, leider nur in summarischer Form, an vier verschiedenen Stellen (18—21) veröffentlicht; seine Absicht, diese Beobachtungen ausführlich zu beschreiben, konnte er leider nicht mehr ausführen.

In seiner Beschreibung der Anatomie und Embryologie der Nase in Heymann's Lehrbuch (19) verwerthet Mihalkovics nicht nur seine eigenen Befunde, sondern berücksichtigt dabei auch die gesammte Litteratur, so dass er ausser Zuckerkandl als genauester Kenner dieses Gegenstandes betrachtet werden kann.

Wenn wir die letzte Arbeit Mihalkovics's, eine Studie über das Jacobson'sche Organ (23), lesen, so erweckt es neues Bedauern in uns über den Verlust, den die Wissenschaft durch das frühzeitige Hinscheiden des Ge-

lehrten erlitten hat. Auch hier, wie in allen seinen Arbeiten, bietet er eine vollständige, abgerundete Darstellung des Gegenstandes.

Wir haben in diesen wenigen Zeilen versucht, ein Bild des äusseren Lebensganges Géza von Mihalkovics's zu geben. Sein Leben war reicher an innerer Befriedigung als an äusseren Erfolgen; bei seinem idealen Streben und seiner rastlosen Arbeitslust stellte er diese gewiss höher als jene. Was er als Forscher geleistet, spricht für sich und sichert ihm einen ehrenvollen Platz in der Wissenschaft, dem Menschen und Gelehrten werden seine Freunde und Fachgenossen ein freundliches Andenken bewahren!

Verzeichnis der Schriften von G. v. Mihalkovics.

(Von den ungarischen Veröffentlichungen sind nur diejenigen angeführt, die in deutscher Sprache nicht erschienen sind. Ebenso sind diejenigen Publicationen Mihalkovics's, die sich nicht direct auf Anatomie beziehen, weggelassen.)

1. Beiträge zur Structur des Kammes des Vogelauges. Arch. f. micr. Anat. 1873. Bd. IX.
2. Beiträge zur Anatomie und Histologie des Hodens. Sitzungsber. d. Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1873. Bd. XXV.
3. Ein Beitrag zur ersten Anlage der Augenlinse. Arch. f. micr. Anat. 1874. Bd. XI.
4. Entwickelung des Gehirn-Anhanges. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1874. Nr. 20.
5. Wirbelseite und Hirnanhang. Arch. f. d. micr. Anat. 1874. Bd. XI.
6. Entwickelung der Zirbeldrüse. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1874. Nr. 16.
7. Die Entwickelung des Gehirnbalkens und des Gewölbes. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1876. Nr. 19.
8. Entwickelungsgeschichte des Gehirns. Leipzig 1877. 4°.
9. Általános boncztan. Budapest 1881. (Allgemeine Anatomie. Budapest 1881. 8°.)
10. Ungarische Übersetzung von W. Krause's Handbuch der menschlichen Anatomie. 3. Aufl. Budapest 1883.
11. Untersuchungen über die Entwickelung des Harn- und Geschlechtsapparates der Amnioten. Internat. Monatschr. f. Anat. u. Physiol. 1885. Bd. II.
12. A hermafroditaságról. Természettudományi Közlöny. (Über Hermaphroditismus.) 1885.
13. A leiró ember-boncztan és tájboncztan tankönyve. Budapest 1888. (Lehrbuch der descriptiven und topographischen Anatomie des Menschen. Budapest 1888. 8°.)

14. Emlékbeszéd Dr. Henle Jacob, a. m. tud. Akadémia kültagja felett. Kiadja a M. tud. Akadémia 1887. (Denkrede auf Jacob Henle gehalten in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.)
15. A központi idegrendszer és érzékszervek morphologiája. Budapest 1892. (Morphologie des centralen Nervensystems und der Sinnesorgane. Budapest 1892. 8°.)
16. Emlékbeszéd Lenhossék József felett. Kiadja a M. tud. Akadémia. 1893. (Denkrede auf J. v. Lenhossék gehalten in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften).
17. A herecsövek szöveti szerkezete. Budapest 1894. fol. (Histologische Structur der Hodenkanälchen. Aus der Festschrift zum Jubiläum des Prof. Kovács 1894.)
18. Bau und Entwickelung der pneumatischen Gesichtshöhlen. Verhandl. d. Anat. Gesellsch. 10. Versammlung in Berlin 1896. Jena 1896.
19. Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Nase und ihrer Nebenhöhlen. In „Handbuch der Laryngologie und Rhinologie", herausgegeben von Dr. Paul Heymann. 1896. Bd. III. 8°. Wien, Hölder.
20. A gerinczesek szagló szerve. Természettudományi Közlöny. 1896. (Das Geruchsorgan der Wirbelthiere.)
21. Nasenhöhle und Jacobson'sches Organ. Eine morphologische Studie. Anat. Hefte. 1898. Bd. XI.
22. Biológiai problémák és feladatok. Rectori székfoglaló beszéd. Budapest 1898. (Biologische Probleme und Aufgaben. Rectoratsrede. Budapest 1898.)
23. Az ember anatomiája és szövettana. Első rész: A mozgó szervek anatomiája. Budapest 1898. (Anatomie und Histologie des Menschen. Erster Theil: Anatomie der Bewegungsorgane. Budapest 1898.)
24. Általános fejlödéstan. Első kötet. Budapest 1899. (Allgemeine Entwickelungsgeschichte. I. Bd. 414 S. 327 Fig. Mit einem Bildnisse K. E. v. Baer's. Budapest 1899.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01300 3470